1m

1m

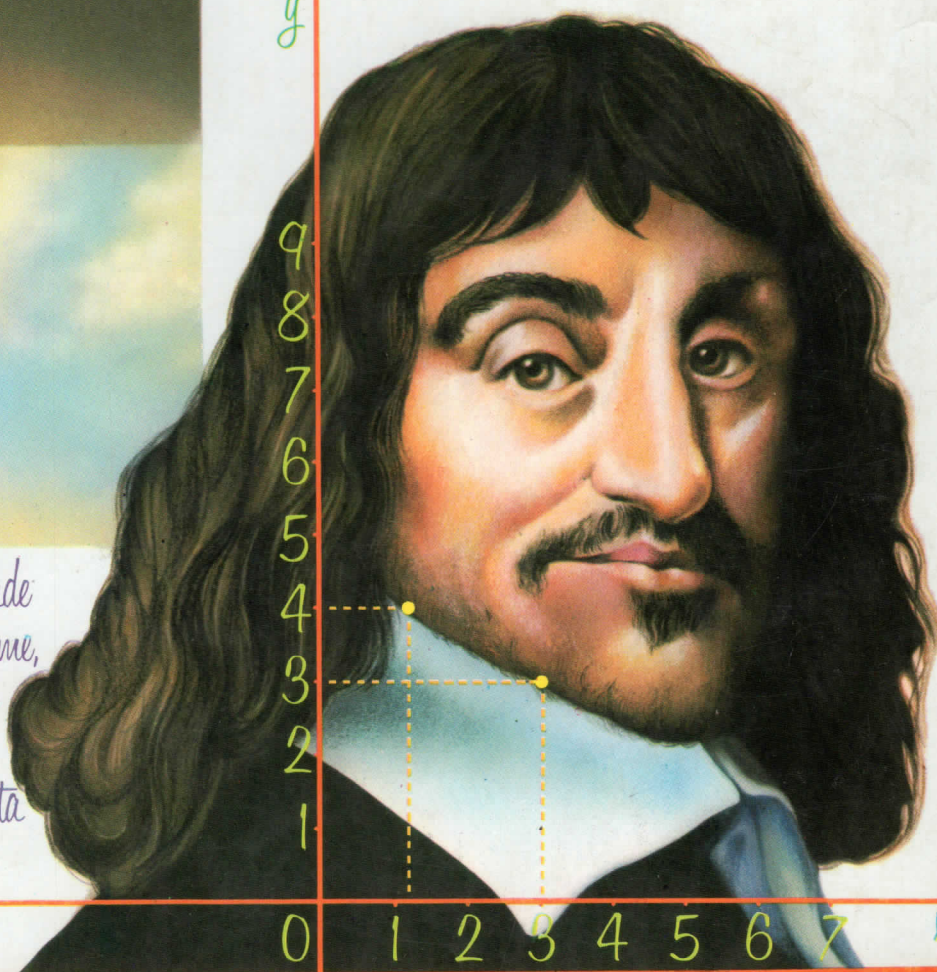
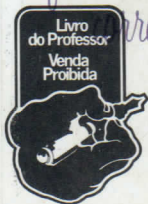
1m

Metro cúbico: unidade fundamental de medida de volume, correspondente ao volume de um cubo, cuja medida do comprimento da aresta é de 1 metro.

y

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

1 2 3 4 5 6 7

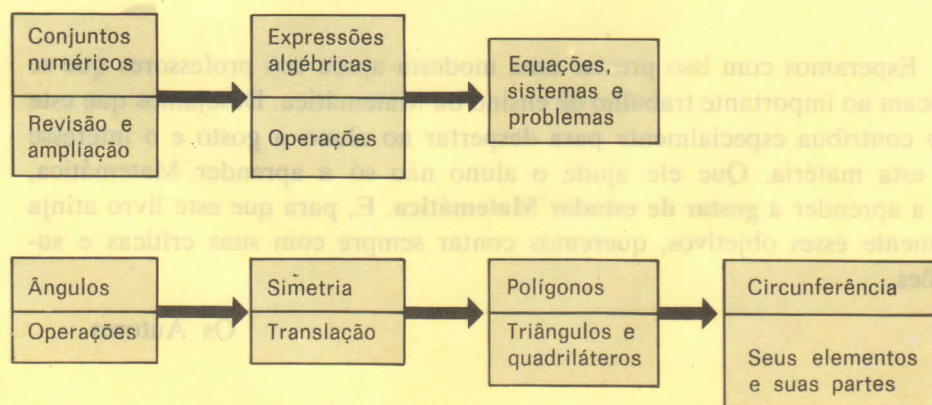
editora ática

De acordo com o Guia Curricular do Estado de São Paulo

OBJETIVO DESTE LIVRO

Este livro foi escrito com a finalidade de colocar o aluno em contato direto com duas partes importantíssimas da Matemática: a **Álgebra** e a **Geometria**. Elas são importantes principalmente porque servem para desenvolver o raciocínio do aluno e, assim, prepará-lo para os seus estudos em graus mais adiantados.

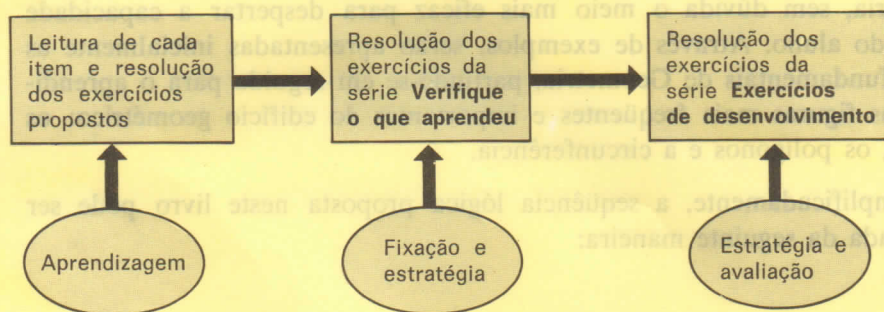
Em nosso entender, para introduzir o aluno no estudo da Álgebra torna-se necessário fazer uma revisão dos conjuntos numéricos já estudados e ainda fornecer-lhe o conhecimento de mais dois conjuntos: o dos números irracionais e o dos números reais. Dominando o conjunto dos números reais — que reúne todos os outros conjuntos numéricos —, o aluno estará apto a penetrar no campo da Álgebra. De modo gradativo, irá avançando neste campo até chegar às equações, aos sistemas e aos problemas do primeiro grau, assuntos estes que, embora já abordados na série anterior, podem ser captados agora com uma amplitude muito maior, visto que o aluno dispõe de condições mais abertas de raciocínio.

O estudo da Álgebra terá continuidade na 8.ª série. E, na seqüência lógica proposta neste livro, passamos a desenvolver algumas noções de Geometria, sem dúvida o meio mais eficaz para despertar a capacidade mental do aluno. Através de exemplos, serão apresentadas inicialmente as noções fundamentais de Geometria, partindo-se em seguida para o aprendizado das figuras mais freqüentes e importantes do edifício geométrico: os ângulos, os polígonos e a circunferência.

Simplificadamente, a seqüência lógica proposta neste livro pode ser visualizada da seguinte maneira:

ESTRUTURA DESTE LIVRO

No sentido de alcançar o objetivo mencionado, todos os itens de cada unidade são seguidos de um grande número de exercícios, que o aluno deverá fazer no próprio livro, sob a orientação do professor. A isso denominamos **fase de aprendizagem**. Para reforçá-la é introduzida, após um determinado número de itens, uma série de exercícios com o nome de **Verifique o que aprendeu**, que constitui a **fase de fixação**. Esta série deve ser aproveitada pelo professor como estratégia para atingir os objetivos específicos propostos.

No final de cada unidade existe uma série de exercícios denominada **Exercícios de desenvolvimento**. Sua finalidade é desenvolver aquilo que o aluno já aprendeu e fixou. Esta série poderá ser feita em classe ou em casa, dependendo do critério do professor. Por outro lado, ela se presta como material de avaliação da aprendizagem ou como estratégia para atingir os objetivos específicos da unidade.

De maneira esquemática, assim pode ser visualizada a seqüência dos diversos passos que formam a estrutura de cada unidade:

Esperamos com isso prestar uma modesta ajuda aos professores que se dedicam ao importante trabalho de ensino da Matemática. Desejamos que este livro contribua especialmente para despertar no aluno o gosto e o interesse por esta matéria. Que ele ajude o aluno não só a aprender Matemática, mas a aprender a **gostar de estudar Matemática**. E, para que este livro atinja realmente esses objetivos, queremos contar sempre com suas críticas e sugestões.

Os Autores

Caro colega

Temos a satisfação de lhe apresentar este livro de Matemática destinado à 7.ª série do Primeiro Grau. Ao elaborá-lo, tivemos a preocupação de seguir dois critérios que julgamos de fundamental importância para o êxito de qualquer texto didático:

- **Não trazer complicações ao aluno** — Este critério nos levou a escrever o texto numa linguagem simples e direta, por vezes mesmo coloquial, o que, em nosso entender, é fundamental para o entendimento dos assuntos.

- **Ser um auxiliar do professor** — Com a intenção de atender a esta finalidade, a estrutura do livro foi organizada de modo a apresentar a parte teórica de maneira simples, clara e objetiva para, a seguir, explorar exaustivamente essa teoria através de exercícios que vão introduzindo paulatinamente as dificuldades comuns aos nossos alunos. Isso permite uma real fixação dos assuntos estudados.

ANTÔNIO SARDELLA • EDISON DA MATTA

MATEMÁTICA

7ª SÉRIE PRIMEIRO GRAU

DE ACORDO COM O GUIA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO

O PLANEJAMENTO DE CURSO, AS SUGESTÕES DIDÁTICAS E AS RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS NÃO CONSTAM NO LIVRO DO ALUNO.

Caro Aluno

Você está de parabéns pelo seu sucesso nos estudos. Agora faltam apenas duas etapas para concluir o Primeiro Grau.

É claro que você deve ter encontrado algumas dificuldades. Mas se chegou até aqui, poderá muito bem vencer os novos obstáculos que encontrar pela frente. Em outras palavras, você mostrou que é capaz não só de terminar o Primeiro Grau, mas também de continuar os seus estudos no Segundo Grau e ir mesmo mais adiante.

Na 7.ª série você vai somar novos conhecimentos àqueles que foram adquiridos nas séries anteriores. Irá avançando passo a passo e seu trabalho será dividido em pequenas tarefas, que devem ser realizadas cada uma na sua vez, sem deixar que se acumulem para a última hora. Assim, sem subtrair nem um minuto do seu tempo de estudo, no final do ano você verá que os pequenos esforços se terão multiplicado muitas vezes, dando um grande resultado.

O objetivo deste livro é, em conjunto com seu professor, ajudá-lo nesta operação.

Bom trabalho!

Os Autores

ÍNDICE

Unidade 1 OS CONJUNTOS NUMÉRICOS

UMA REVISÃO

Você já conhece alguns conjuntos numéricos. Vamos recordar.

- **Números naturais** — Os números naturais foram os primeiros a serem desenvolvidos e surgiram com a necessidade de se contarem os elementos de uma coleção.

  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

  É importante lembrar que nesse conjunto as operações adição e multiplicação são fechadas. Assim:

  Se $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$, então $(a + b) \in \mathbb{N}$.

  Se $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$, então $(a \cdot b) \in \mathbb{N}$.

- **Números inteiros relativos** — O conjunto dos números inteiros relativos é a primeira ampliação do conjunto dos naturais.

  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

  Nesse conjunto, as operações adição, multiplicação e subtração são fechadas. Assim:

  Se $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$, então $(a + b) \in \mathbb{Z}$.

  Se $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$, então $(a \cdot b) \in \mathbb{Z}$.

  Se $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$, então $(a - b) \in \mathbb{Z}$.

- **Números racionais relativos** — O conjunto dos números racionais relativos é uma ampliação do conjunto dos inteiros relativos.

  $$\mathbb{Q} = \left\{\dots, -2, \dots, -\frac{3}{2}, \dots, -1, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2}, \dots, 1, \dots, \frac{3}{2}, \dots, 2, \dots\right\}$$

  Nesse conjunto, adição, multiplicação, subtração e divisão são fechadas. Assim:

  Se $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}$, então $(a + b) \in \mathbb{Q}$.

  Se $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}$, então $(a \cdot b) \in \mathbb{Q}$.

  Se $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}$, então $(a - b) \in \mathbb{Q}$.

  Se $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}$, então $(a : b) \in \mathbb{Q}$ $(b \neq 0)$.

  O conjunto $\mathbb{Q}$ pode ser definido do seguinte modo: $\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{p}{q}, \text{ onde } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\right\}$

Exemplos:

1) $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, pois $2 \in \mathbb{Z}$ e $3 \in \mathbb{Z}$.

2) $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$, pois $-3 \in \mathbb{Z}$ e $5 \in \mathbb{Z}$.

3) $0 \in \mathbb{Q}$, pois $0 = \frac{0}{1}$, onde $0 \in \mathbb{Z}$ e $1 \in \mathbb{Z}$.

4) $7 \in \mathbb{Q}$, pois $7 = \frac{7}{1}$, onde $7 \in \mathbb{Z}$ e $1 \in \mathbb{Z}$.

5) $-5 \in \mathbb{Q}$, pois $-5 = \frac{-5}{1}$, onde $-5 \in \mathbb{Z}$ e $1 \in \mathbb{Z}$.

6) $0{,}75 \in \mathbb{Q}$, pois $0{,}75 = \frac{3}{4}$, onde $3 \in \mathbb{Z}$ e $4 \in \mathbb{Z}$.

VAMOS EXERCITAR

a) Complete adequadamente com o símbolo $\in$ ou $\notin$:

1) $0 \in \mathbb{N}$	7) $-2 \notin \mathbb{N}$	13) $-\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$	19) $0{,}222\ldots \notin \mathbb{N}$
2) $0 \in \mathbb{Z}$	8) $-2 \in \mathbb{Z}$	14) $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$	20) $0{,}222\ldots \notin \mathbb{Z}$
3) $0 \in \mathbb{Q}$	9) $-2 \in \mathbb{Q}$	15) $-\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$	21) $0{,}222\ldots \in \mathbb{Q}$
4) $5 \in \mathbb{N}$	10) $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$	16) $0{,}7 \notin \mathbb{N}$	22) $0{,}15 \notin \mathbb{N}$
5) $5 \in \mathbb{Z}$	11) $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$	17) $0{,}7 \notin \mathbb{Z}$	23) $0{,}15 \notin \mathbb{Z}$
6) $5 \in \mathbb{Q}$	12) $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$	18) $0{,}7 \in \mathbb{Q}$	24) $0{,}15 \in \mathbb{Q}$

b) Preencha as lacunas com $\in$ ou $\notin$, indique as operações e complete as frases:

1) Se $\begin{cases} 2 \in \mathbb{N} \\ 5 \in \mathbb{N} \end{cases}$ então $\begin{cases} (2 + 5) \in \mathbb{N} \\ (2 \,.\, 5) \in \mathbb{N} \\ (2 - 5) \notin \mathbb{N} \\ (2 : 5) \notin \mathbb{N} \end{cases}$

Isso mostra que a *adição* e a *multiplicação* são fechadas em $\mathbb{N}$.

2) Se $\begin{cases} 3 \in \mathbb{Z} \\ -4 \in \mathbb{Z} \end{cases}$ então $\begin{cases} 3 + (-4) \in \mathbb{Z} \\ 3 \,.\, (-4) \in \mathbb{Z} \\ 3 - (-4) \in \mathbb{Z} \\ 3 : (-4) \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

Isso mostra que a *adição*, a *multiplicação* e a *subtração* são fechadas em $\mathbb{Z}$.

3) Se $\begin{cases} 5 \in \mathbb{Q} \\ 7 \in \mathbb{Q} \end{cases}$ então $\begin{cases} (5 + 7) \in \mathbb{Q} \\ (5 \,.\, 7) \in \mathbb{Q} \\ (5 - 7) \in \mathbb{Q} \\ (5 : 7) \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Isso mostra que a *adição*, a *multiplicação*, a *subtração* e a *divisão* são fechadas em $\mathbb{Q}$.

DESENVOLVA SUA CRIATIVIDADE

Dê exemplos que comprovem as afirmações:

A soma de dois números naturais é sempre um número natural.		O produto de dois números racionais é sempre um número racional.	
A diferença de dois números naturais nem sempre é um número natural.		O quociente de dois números inteiros nem sempre é um número inteiro.	

ALGUNS SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ E $\mathbb{Q}$

Você deve conhecer alguns subconjuntos importantes dos naturais, dos inteiros e dos racionais. Para isso, você precisa saber que: • o símbolo * indica a exclusão do zero; • o símbolo + indica a exclusão de todos os números negativos; • o símbolo − indica a exclusão de todos os números positivos.

Exemplo:

Se $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, então:

$A^* = \{-3, -2, -1, +1, +2, +3\}$

$A_+ = \{0, +1, +2, +3\}$

$A_+^* = \{+1, +2, +3\}$

$A_- = \{-3, -2, -1, 0\}$

$A_-^* = \{-3, -2, -1\}$

Deste modo, para os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, temos os seguintes subconjuntos:

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (números naturais não-nulos)

$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -2, -1, +1, +2, \ldots\}$ (números inteiros não-nulos)

$\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, \ldots\}$ (números inteiros não-negativos)

$\mathbb{Z}_+^* = \{+1, +2, +3, \ldots\}$ (números inteiros positivos)

$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ (números inteiros não-positivos)

$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ (números inteiros negativos)

$\mathbb{Q}^*$: números racionais não-nulos

$\mathbb{Q}_+$: números racionais não-negativos

$\mathbb{Q}_+^*$: números racionais positivos

$\mathbb{Q}_-$: números racionais não-positivos

$\mathbb{Q}_-^*$: números racionais negativos

VAMOS EXERCITAR

a) Complete:

1) Se $A = \left\{-2, -1, 0, +\frac{1}{2}, +1\right\}$, então:

$A^* =$ $\{-2, -1, +\frac{1}{2}, +1\}$

$A_+ =$ $\{0, +\frac{1}{2}, +1\}$

$A_- =$ $\{-2, -1, 0\}$

$A_+^* =$ $\{+\frac{1}{2}, +1\}$

$A_-^* =$ $\{-2, -1\}$

2) Se $B^* = \{-5, -2, +2, +5\}$, então:

$B =$ $\{-5, -2, 0, +2, +5\}$

$B_+ =$ $\{0, +2, +5\}$

$B_- =$ $\{-5, -2, 0\}$

$B_+^* =$ $\{+2, +5\}$

$B_-^* =$ $\{-5, -2\}$

b) Complete corretamente as sentenças, usando o símbolo $\subset$ ou $\supset$:

1) $\mathbb{Z}^*$ $\subset$ $\mathbb{Z}$

2) $\mathbb{Z}$ $\subset$ $\mathbb{Q}$

3) $\mathbb{Z}$ $\supset$ $\mathbb{N}^*$

4) $\mathbb{Z}_+^*$ $\subset$ $\mathbb{Z}_+$

5) $\mathbb{Q}_-^*$ $\supset$ $\mathbb{Z}_-^*$

6) $\mathbb{N}^*$ $\subset$ $\mathbb{Z}^*$

7) $\mathbb{Q}_+$ $\supset$ $\mathbb{N}$

8) $\mathbb{Z}_+^*$ $\subset$ $\mathbb{Q}_+^*$

9) $\mathbb{Q}$ $\supset$ $\mathbb{Z}_-^*$

10) $\mathbb{N}^*$ $\subset$ $\mathbb{Z}_+$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Explique as sentenças, de acordo com a definição do conjunto $\mathbb{Q}$:

1) $\frac{1}{7} \in \mathbb{Q}$, pois $1 \in \mathbb{Z}$ e $7 \in \mathbb{Z}$.

2) $8 \in \mathbb{Q}$, pois $8 = \frac{8}{1}$, onde $8 \in \mathbb{Z}$ e $1 \in \mathbb{Z}$

3) $-\frac{4}{9} \in \mathbb{Q}$, pois $-4 \in \mathbb{Z}$ e $9 \in \mathbb{Z}$

4) $0{,}5 \in \mathbb{Q}$, pois $0{,}5 = \frac{1}{2}$, onde $1 \in \mathbb{Z}$ e $2 \in \mathbb{Z}$.

5) $0{,}\bar{5} \in \mathbb{Q}$, pois $0{,}\bar{5} = \frac{5}{9}$, onde $5 \in \mathbb{Z}$ e $9 \in \mathbb{Z}$.

b) Complete corretamente as sentenças, usando o símbolo $\in$ ou $\notin$:

1) $-5 \notin \mathbb{N}^*$

2) $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}_-$

3) $+\frac{2}{3} \notin \mathbb{Q}^*_-$

4) $0 \in \mathbb{Z}_+$

5) $0 \notin \mathbb{Z}^*_-$

6) $0{,}8 \in \mathbb{Q}^*$

7) $1{,}3 \in \mathbb{Q}^*_+$

8) $-0{,}25 \notin \mathbb{Z}_-$

9) $0{,}\bar{4} \in \mathbb{Q}^*$

10) $-8 \in \mathbb{Z}^*_-$

11) $3 \in \mathbb{N}^*$

12) $0{,}8 \notin \mathbb{Z}^*$

c) Dê os conjuntos, por indicação dos seus elementos, e efetue as operações:

1) $A = \{-6, -4, -2, 0, +3, +5\}$

$A^* = \{-6, -4, -2, +3, +5\}$

$A_+ = \{0, +3, +5\}$

$A_- = \{-6, -4, -2, 0\}$

$A^*_+ = \{+3, +5\}$

$A^*_- = \{-6, -4, -2\}$

$A_+ \cup A_- = A$

$A_+ \cap A_- = \{0\}$

$A^*_+ \cup A^*_- = A^*$

$A^*_+ \cap A^*_- = \emptyset$

2) $B^* = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}, +\frac{1}{2}\right\}$

$B = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, +\frac{1}{4}, +\frac{1}{2}\right\}$

$B_+ = \left\{0, +\frac{1}{4}, +\frac{1}{2}\right\}$

$B_- = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0\right\}$

$B^*_+ = \left\{+\frac{1}{4}, +\frac{1}{2}\right\}$

$B^*_- = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right\}$

$B_+ \cup B^* = B$

$B_- \cap B^* = B^*_-$

$B^*_- \cup B_+ = B$

$B^*_+ \cap B_- = \emptyset$

d) Dê os conjuntos, por indicação dos seus elementos, e complete as sentenças com o símbolo $\subset$ ou $\supset$:

1) $A = \{-5, 0, +5\}$

$A^* = \{-5, +5\}$

$A_+ = \{0, +5\}$

$A_- = \{-5, 0\}$

$A^*_+ = \{+5\}$

$A^*_- = \{-5\}$

$A^* \supset A^*_-$

$A_- \subset A$

2) $B_+ = \{0, +7\}$ e $B_- = \{-9, -7, 0\}$

$B = \{-9, -7, 0, +7\}$

$B^* = \{-9, -7, +7\}$

$B^*_+ = \{+7\}$

$B^*_- = \{-9, -7\}$

$B^*_+ \subset B$

$B^* \supset B^*_+$

O CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Denominam-se irracionais os números que não podem ser representados na forma $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

Observe:

$\sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1} \in \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\sqrt{2} = ? \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{5}{7}} = ? \notin \mathbb{Q}$

Dizemos, então, que os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{\frac{5}{7}}$ são números irracionais.

Logo: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$

$\sqrt{\frac{5}{7}} \in \mathbb{Q}'$ $\qquad$ $\mathbb{Q}'$: conjunto dos números irracionais

Complete:

1) $\sqrt{9} = 3 = \frac{3}{1} \in \mathbb{Q}$

2) $\sqrt{5} = ? \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \sqrt{5} \in \mathbb{Q}'$

3) $\sqrt{16} =$ $4 = \frac{4}{1} \in \mathbb{Q}$

4) $\sqrt{\frac{9}{16}} =$ $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$

5) $\sqrt{8} =$ $? \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{8} \in \mathbb{Q}'$

6) $\sqrt{\frac{2}{3}} =$ $? \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} \in \mathbb{Q}'$

7) $\sqrt{25} =$ $5 = \frac{5}{1} \in \mathbb{Q}$

8) $\sqrt{\frac{36}{49}} =$ $\frac{6}{7} \in \mathbb{Q}$

9) $\sqrt{7} =$ $? \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{7} \in \mathbb{Q}'$

10) $\sqrt{48} =$ $? \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \sqrt{48} \in \mathbb{Q}'$

UM NÚMERO IRRACIONAL FAMOSO

Na 5.ª série, ao estudar o sistema métrico decimal, você trabalhou com um número representado pela letra grega π (pi).

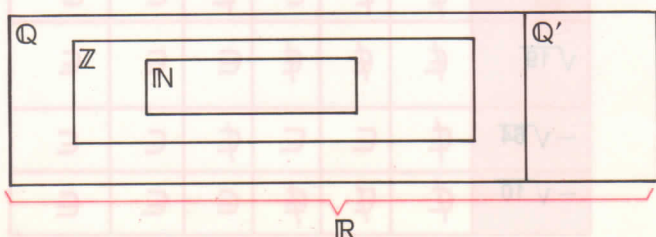
Pois bem, o número π não pode ser representado na forma $\frac{p}{q}$, pois trata-se de um número irracional.

$\pi = 3,14159\ldots \in \mathbb{Q}'$

O SURGIMENTO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

A reunião dos conjuntos numéricos estudados nos fornece um novo conjunto, denominado conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

Observe: $\mathbb{Z} \cup \{\text{números fracionários}\} = \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

Logo: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$

ALGUNS SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^*$: números reais não-nulos

$\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

$\mathbb{R}_+$: números reais não-negativos

$\mathbb{R}^*_+$: números reais positivos

$\mathbb{R}_-$: números reais não-positivos

$\mathbb{R}^*_-$: números reais negativos

Complete com o símbolo $\in$ ou $\notin$:

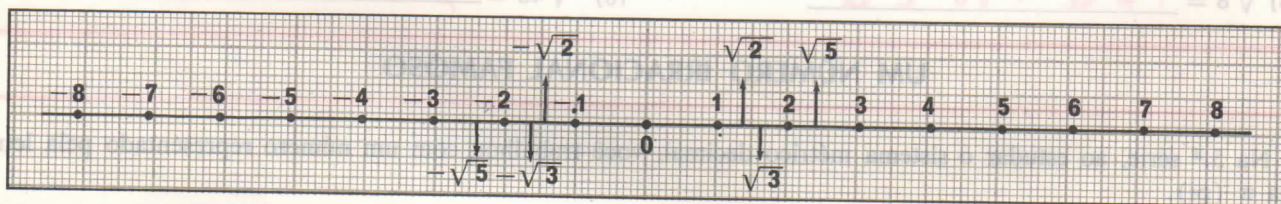
1) $0 \ \underline{\notin}\ \mathbb{Z}^*$
2) $-3 \ \underline{\notin}\ \mathbb{Z}_+$
3) $-5 \ \underline{\in}\ \mathbb{R}$
4) $-\dfrac{2}{3} \ \underline{\in}\ \mathbb{R}^*$
5) $\sqrt{2} \ \underline{\notin}\ \mathbb{Q}$
6) $\sqrt{5} \ \underline{\in}\ \mathbb{Q}'$
7) $\sqrt{8} \ \underline{\in}\ \mathbb{R}$
8) $\sqrt{9} \ \underline{\in}\ \mathbb{Q}$
9) $\sqrt{16} \ \underline{\in}\ \mathbb{R}$
10) $\sqrt{15} \ \underline{\in}\ \mathbb{R}_+$
11) $0,9 \ \underline{\in}\ \mathbb{Q}$
12) $1,2 \ \underline{\notin}\ \mathbb{Q}'$
13) $0,7 \ \underline{\in}\ \mathbb{R}$
14) $0,\overline{5} \ \underline{\in}\ \mathbb{Q}$
15) $0,\overline{6} \ \underline{\in}\ \mathbb{R}$
16) $\sqrt{10} \ \underline{\notin}\ \mathbb{R}_-$

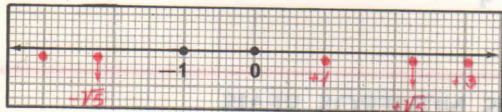
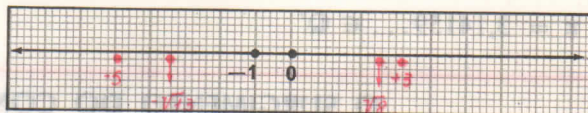
Assinale as sentenças verdadeiras com V e as falsas com F:

1) $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$ (F)
2) $\sqrt{11} \in \mathbb{R}$ (V)
3) $\pi \in \mathbb{Q}$ (F)
4) $\pi \in \mathbb{R}$ (V)
5) $0,\overline{8} \notin \mathbb{Q}'$ (V)
6) $\dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}'$ (F)
7) $-\dfrac{3}{5} \in \mathbb{R}$ (V)
8) $\sqrt{16} \notin \mathbb{R}^*$ (F)
9) $-\sqrt{9} \in \mathbb{R}$ (V)
10) $-\sqrt{17} \notin \mathbb{R}$ (F)
11) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ (V)
12) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$ (V)
13) $\mathbb{Q}' \not\subset \mathbb{R}$ (F)
14) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ (V)
15) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$ (V)
16) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ( ) (V)

A IMAGEM DO NÚMERO REAL: A RETA REAL

A cada um dos pontos de uma reta, podemos associar um numeral que representa um número real. Obtemos assim uma reta numerada, denominada reta real.

Observe:

Represente na reta real os números:

1) -3, $+1$, $\sqrt{5}$, $+3$ e $-\sqrt{5}$

2) $\sqrt{8}$, -5, $-\sqrt{13}$, $+3$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete os quadros, com o símbolo $\in$ ou $\notin$:

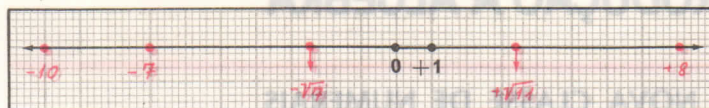
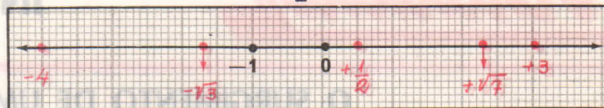
1)

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}'$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$
-14	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$+\dfrac{5}{8}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$0,333\ldots$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
π	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$

2)

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}'$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$
$-0,\overline{12}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\sqrt{19}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$-\sqrt{64}$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$-\sqrt{10}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$

b) Represente na reta real os números:

1) -10, $+8$, $-\sqrt{7}$, -7, $+\sqrt{11}$

2) -4, $+3$, $-\sqrt{3}$, $+\frac{1}{2}$, $+\sqrt{7}$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Identifique estes numerais e escreva ao lado de cada um a palavra racional ou irracional:

1) 0,323232...: racional
2) 0,5: racional
3) 0,55: racional
4) 0,555: racional
5) 0,555...: racional
6) $\sqrt{2}$: irracional
7) π: irracional
8) $\sqrt{100}$: racional
9) $0,\bar{4}$: racional

b) Indique as sentenças verdadeiras (V) e as falsas (F):

1) $7 \in \mathbb{Q}$ (F)
2) $0,32 \in \mathbb{Q}'$ (F)
3) $2,3\bar{5} \in \mathbb{R}$ (V)
4) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (V)
5) $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ (V)
6) $0 \in \mathbb{R}^*$ (F)
7) $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*$ (V)
8) $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}$ (F)
9) $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}^* = \mathbb{R}$ (V)
10) $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*$ (F)
11) $\mathbb{N} \supset \mathbb{Q}$ (F)
12) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ (V)
13) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ (V)
14) $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$ (V)
15) $\mathbb{R}^* + \{0\} = \mathbb{R}$ (V)

c) Assinale com um x os numerais que não representam números reais:

1) $\frac{2}{0}$ (x)
2) $3 \cdot \pi$ ( )
3) $\frac{0}{5}$ ( )
4) $-\sqrt{5}$ ( )
5) $\frac{0}{0}$ (x)
6) $-\frac{1}{3}$ ( )
7) $\sqrt{-2}$ (x)
8) $\sqrt{4}$ ( )
9) $3 \cdot 0$ ( )

d) Assinale a alternativa correta:

1) Se $\sqrt{5}$ é irracional, então:
   a. ( ) $\sqrt{5}$ pode ser escrita na forma $\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.
   b. ( ) $\sqrt{5}$ pode ser racional.
   c. (x) $\sqrt{5}$ não pode ser escrita jamais na forma $\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.
   d. ( ) $2\sqrt{5}$ é racional.

2) Se $\sqrt{2}$ é irracional, então:
   a. ( ) $2\sqrt{2}$ é racional.
   b. (x) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ é racional.
   c. ( ) $\sqrt{2} : \sqrt{2}$ é irracional.
   d. ( ) $\sqrt{2}$ pode ser escrita na forma $\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.

3) O numeral 0,777 representa um número:
   a. ( ) natural.
   b. ( ) inteiro.
   c. (x) racional.
   d. ( ) irracional.

4) O numeral $0,\bar{7}$ representa um número:
   a. ( ) inteiro.
   b. ( ) irracional.
   c. ( ) natural.
   d. (x) real.

5) O conjunto dos números reais é:
   a. ( ) finito.
   b. ( ) subconjunto de $\mathbb{Q}$.
   c. (x) infinito.
   d. ( ) obtido da união de $\mathbb{N}$ com $\mathbb{Z}$.

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA

O SURGIMENTO DE UMA NOVA CLASSE DE NUMERAIS

Você já sabe que numeral é qualquer símbolo usado para representar um número. Pois bem, agora, para representar os números, usaremos também letras do alfabeto latino, as quais constituirão os **numerais literais**. Essa forma de representar os números apresenta grandes vantagens no cálculo, pois dá maior simplicidade ao raciocínio e permite a generalização dos problemas aritméticos.

Vejamos, no quadro que segue, a indicação das operações, utilizando os numerais literais:

Operação	Linguagem matemática	Linguagem comum	Leitura
Adição	$x + 2$	Soma indicada dos números **x** e dois ou soma indicada do número **x** com o número dois.	**x** mais dois
	$a + b$	Soma indicada dos números **a** e **b** ou soma indicada do número **a** com o número **b**.	**a** mais **b**
Subtração	$x - 5$	Diferença indicada dos números **x** e cinco ou diferença indicada do número **x** com o número cinco.	**x** menos cinco
Multiplicação	$2 \cdot x$ ou $2x$	Produto indicado dos números dois e **x** ou o dobro do número **x**.	dois **x**
	$a \cdot b$ ou ab	Produto indicado dos números **a** e **b**.	ab
Divisão	$x : 3$ ou $\frac{x}{3}$	Quociente indicado dos números **x** e três ou a terça parte do número **x**.	**x** dividido por três ou **x** sobre três
Potenciação	a^2	A segunda potência do número **a** ou o quadrado do número **a**.	**a** dois
Radiciação	$\sqrt[3]{y}$	Raiz cúbica do número **y**.	
Adição e multiplicação	$2x + 3y$	Soma indicada do dobro do número **x** com o triplo do número **y**.	Dois **x**, mais três **y**.
Subtração, multiplicação e potenciação	$3a^2 - b^3$	Diferença indicada do triplo do quadrado do número **a** com o cubo do número **b**.	Três **a** dois, menos **b** três.

VAMOS EXERCITAR

a) Passe para a linguagem matemática:

1) O quadrado do número **y**: y^2

2) A raiz cúbica do número **x**: $\sqrt[3]{x}$

3) A soma indicada do número **y** com o número sete: $y + 7$

4) A diferença indicada do número oito com o número **a**: $8 - a$

5) A diferença indicada entre o quadrado do número **m** e o cubo do número **n**: $m^2 - n^3$

6) O quadrado da soma indicada do número **a** com o número **b**: $(a + b)^2$

7) A soma indicada entre o quadrado do número **x** e o quadrado do número **y**: $x^2 + y^2$

8) A diferença indicada entre os cubos dos números **x** e cinco: $x^3 - 5^3$

9) A soma indicada entre o quádruplo do número **m** e o triplo do número **n**: $4m + 3n$

10) O quociente indicado entre o cubo do número **x** e o quadrado do número **y**: $x^3 : y^2$ ou $\frac{x^3}{y^2}$

b) Passe para a linguagem comum:

1) $5a + b$: A soma indicada do quíntuplo do número a com o número b.

2) $a^2 - 3b$: A diferença indicada entre o quadrado do número a e o triplo do número b.

3) $(a - b)^2$: O quadrado da diferença indicada entre os números a e b.

4) $x^2 - y^2$: A diferença indicada entre o quadrado do número x e o quadrado do número y.

5) $\frac{a^3}{3x}$: O quociente indicado entre o cubo do número a e o triplo do número x.

6) $\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}$: A raiz cúbica do quociente indicado entre o quadrado do número x e o número y.

7) $2a^3 - 3b^2$: A diferença indicada entre o dobro do cubo do número a e o triplo do quadrado do número b.

c) Dê a leitura:

1) $9x^2$: nove x dois

2) $13a^5$: treze a cinco

3) $x^8 : 2y^5$: x oito dividido por dois y cinco

4) $4x^5 + 2y^7$: quatro x cinco mais dois y sete

5) $5b^8$: cinco b oito

6) $12x^3$: doze x três

NOÇÃO DE EXPRESSÃO LITERAL OU ALGÉBRICA

Observe as expressões:

$3 + \frac{2}{5} - \frac{1}{7}$	$x + y$	$\frac{5x}{7} - 2x^2 + 3a$
Esta expressão contém apenas **numerais**. É uma **expressão numérica**.	Esta expressão contém apenas **numerais literais** (letras). É uma **expressão literal** ou **expressão algébrica**.	Esta expressão contém **numerais** e **numerais literais** (letras). É uma **expressão literal** ou **expressão algébrica**.

Então:

Expressão algébrica é a expressão que envolve numerais e numerais literais (letras), ou então apenas numerais literais (letras) agrupados através de sinais que indicam operações.

Numa expressão algébrica, cada uma das partes separadas pelos sinais operacionais + ou − recebe o nome de **termo algébrico**.

Veja:

$\boxed{2x^2} - \boxed{3x^2y} + \boxed{2a}$

termo algébrico

Expressão constituída por três termos algébricos.

$\boxed{3x^5} - \boxed{2xy}$

termo algébrico

Expressão constituída por dois termos algébricos.

$\boxed{4x^5y^3}$

termo algébrico

Expressão constituída por um único termo algébrico.

Deste modo, podemos dizer que:

Termo algébrico é o conjunto de numerais e numerais literais ou apenas numerais literais agrupados por sinais que indicam operações, exceto + e −.

Classifique em expressão numérica ou expressão algébrica:

1) $2 + 3$: expressão numérica

2) $x + 3$: expressão algébrica

3) $\frac{2}{3} - \frac{1}{5}$: expressão numérica

4) $3x^2 - \frac{1}{4}$: expressão algébrica

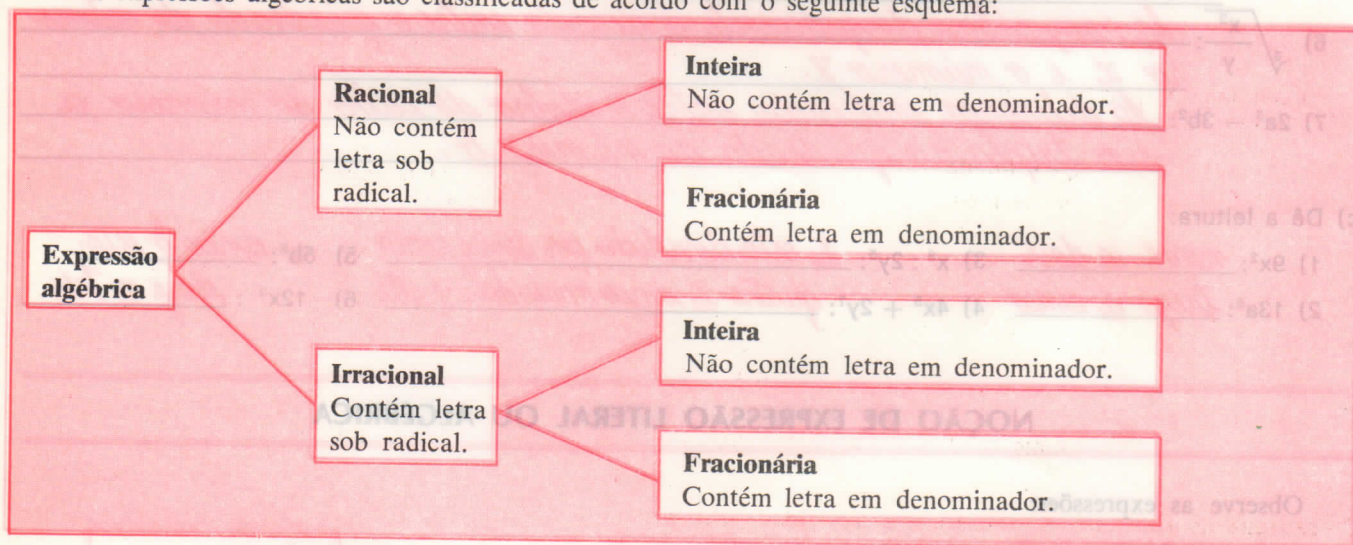
5) $3xy + \frac{5x^2}{2}$: expressão algébrica

6) $3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$: expressão numérica

7) $3ab + 5a^2$: expressão algébrica

8) $\frac{5m^2n}{2} - \frac{3mn^2}{4}$: expressão algébrica

CLASSIFICAÇÃO DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

As expressões algébricas são classificadas de acordo com o seguinte esquema:

Exemplos:

$2x^2y + 3x - 5y^3$

$\frac{3x^4}{2} - \frac{5xy}{3} + 2$

São expressões **racionais** (não contêm letra sob radical) e **inteiras** (não contêm letra em denominador).

$\frac{3a^2x}{y} + 2ab$

$\frac{5x}{y} - \frac{3y}{2x}$

São expressões **racionais** (não contêm letra sob radical) e **fracionárias** (contêm letra em denominador).

$\frac{3\sqrt{x^3}}{2} - 5y^2$; $5\sqrt[3]{x^2} - 3xy$ } São expressões **irracionais** (contêm letra sob radical) e **inteiras** (não contêm letra em denominador).

Classifique as expressões:

1) $2x^3 - 5x^2 + \frac{3x}{2} + 7$ racional inteira

2) $\frac{3}{x^2} + 2xy^3$ racional fracionária

3) $3\sqrt{x} - 5x$ irracional inteira

4) $\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{2} - 3y^3$ irracional inteira

5) $\frac{\sqrt{x^3}}{y} - 2x^2$ irracional fracionária

6) $4x^2y + 9x^3y - 2x^2y^3$ racional inteira

7) $6x + 5y$ racional inteira

8) $\frac{2x+1}{3} - \frac{5x^2+3}{2}$ racional inteira

Numa expressão algébrica encontramos:

- letras consideradas constantes, ou seja, que assumem sempre o mesmo valor;
- letras consideradas variáveis, ou seja, que podem assumir quaisquer valores permitidos do conjunto ℝ.

Quando, numa expressão algébrica, os expoentes da variável são números naturais, a expressão recebe o nome de **polinômio**.

Exemplos:

- $5y^4 + 3y^2 + 8y - 2$: é uma expressão que recebe o nome de polinômio.
- $6a^3 - \frac{5}{a^2} + 2a + 7$: é uma expressão, porém não é um polinômio.

$$6a^3 - \frac{5}{a^2} + 2a + 7 \Leftrightarrow 6a^3 - 5a^{-2} + 2a + 7$$

Conforme a quantidade de termos, o polinômio recebe denominação especial.

Quantidade de termos	Exemplo	Denominação
1	$2x^2$	monômio
2	$3y + 5$	binômio
3	$5a^2 - 8a + 6$	trinômio
mais de 3	$2y^4 - 9y^3 + 11y^2 - 3y$	polinômio

Classifique as expressões, conforme a quantidade de termos:

1) $2x^2$ monômio

2) $3y - 4$ binômio

3) x monômio

4) $2t^3 - 4t^2 + 5$ trinômio

5) $2y^4 - \frac{11}{2}y^3 + \frac{2}{3}y^2 - 7$ polinômio

6) $\frac{1}{5}y$ monômio

7) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$ binômio

8) $a^3 - a^2 + a + 1$ polinômio

9) $2x^2 - 5x + 6$ trinômio

10) $x^2 + x$ binômio

11) $3b^2 - 5b - 1$ trinômio

12) $2t^2$ monômio

13) $\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x + 8$ trinômio

14) 9 monômio

15) $y^3 + 2$ binômio

DESENVOLVA SUA CRIATIVIDADE

Crie exemplos de expressões que sejam:

monômios	binômios	trinômios	polinômios

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Passe para a linguagem matemática:

1) O triplo do quadrado do número **a**: $3a^2$

2) A diferença indicada do quádruplo do número **a** com o triplo do número **b**: $4a - 3b$

3) O dobro da diferença indicada do número **x** com o número **y**: $2(x - y)$

4) A soma indicada do dobro do número **m** com o quadrado do número **y**: $2m + y^2$

5) O triplo da soma indicada do número **a** com o número cinco: $3(a + 5)$

6) O quociente indicado entre o quádruplo do número **x** e o quíntuplo do número **y**: $\frac{4x}{5y}$

7) A raiz cúbica do quádruplo do número **a**: $\sqrt[3]{4a}$

8) A raiz cúbica do triplo do quadrado do número **b**: $\sqrt[3]{3b^2}$

b) Complete o quadro:

Linguagem matemática	Linguagem comum	Leitura
$2x^3$	O dobro do cubo do número x.	dois x três
$3x^2 + 2y^3$	A soma indicada do triplo do quadrado do número x com o dobro do cubo do número y.	três x dois, mais dois y três.
$\frac{6x^2}{5}$	O quociente indicado entre o sêxtuplo do quadrado do número x e cinco.	seis x dois sobre cinco
$2m^3 - 5n^2$	A diferença indicada entre o dobro do cubo do número m e o quíntuplo do quadrado do número n.	dois m três menos cinco n dois.

c) Analise as expressões e assinale com M os monômios, com B os binômios, com T os trinômios e com P os polinômios:

1) $2x^2y^3 + 8x^3y^2$ (B)

2) $-18a^2b$ (M)

3) $4x^2 - 5x^3 + 7$ (T)

4) $5x^3 + 8x^2 - 4x + 1$ (P)

5) $9x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x$ (T)

6) $-\frac{2}{5}x^4y^3$ (M)

7) $x^3 + x^2 + x$ (T)

8) $m^4 + 2m^3 - m^2 + 5$ (P)

9) $x^2 - 5x + 6$ (T)

10) $\frac{3a^4b}{4}$ (M)

11) $a^2 - 3a$ (B)

12) $7a^3b + 8a^2b - 5ab^2$ (T)

13) $\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 5$ (P)

14) x (M)

15) $y^4 + y^3 + y^2 - y + 2$ (P)

d) Classifique as expressões algébricas em racional ou irracional e inteira ou fracionária:

1) $3x^2y^3 + 5x^2 + \frac{2}{3}$ racional inteira

2) $3x\sqrt{2} + \frac{x}{3}$ racional inteira

3) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{3}$ racional fracionária

4) $\sqrt{x+1} + 5$ irracional inteira

5) $\frac{\sqrt{x+1}}{x} - \frac{\sqrt{x-1}}{2}$ irracional fracionária

6) $\frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{\sqrt{5}}{y}$ racional fracionária

OS TERMOS ALGÉBRICOS: PARTES, SEMELHANÇA E GRAU

Observe o termo algébrico $\frac{2}{3}x^2$.

Nele você distingue duas partes:

- a parte numérica ou coeficiente: $\frac{2}{3}$;
- a parte literal: x^2 (letra acompanhada do respectivo expoente).

Veja outros exemplos:

$3x^2y^3$ { coeficiente: 3; parte literal: x^2y^3

$\sqrt{2}\,x^4$ { coeficiente: $\sqrt{2}$; parte literal: x^4

$-x^3y$ { coeficiente: -1; parte literal: x^3y

Complete os quadros:

Termo algébrico	Coeficiente	Parte literal
$3a$	3	a
$-4x$	-4	x
$-x^2y^5$	-1	x^2y^5
$\frac{2}{5}a^2b$	$\frac{2}{5}$	a^2b
$\sqrt{2}\,a^3b^4$	$\sqrt{2}$	a^3b^4
$-\frac{1}{3}x^2y^3$	$-\frac{1}{3}$	x^2y^3
$-5a^3b^4x^2$	-5	$a^3b^4x^2$

Termo algébrico	Coeficiente	Parte literal
$2a^2x$	2	a^2x
$-3xy^4$	-3	xy^4
$-\frac{1}{3}a^3b$	$-\frac{1}{3}$	a^3b
$\frac{3}{2}a^3xy$	$\frac{3}{2}$	a^3xy
$-xy$	-1	xy
$\sqrt{21}\,x^4y^2z$	$\sqrt{21}$	x^4y^2z
a^4bx^2	1	a^4bx^2

Agora analise os termos algébricos: $2x^2$ e $-5x^2$.

Observe que eles têm algo em especial: possuem a parte literal idêntica.

Veja:

$2x^2$ { coeficiente: 2; parte literal: x^2

$-5x^2$ { coeficiente: -5; parte literal: x^2

Pois bem, dois ou mais termos algébricos que possuem a parte literal idêntica são denominados **termos semelhantes.**

Complete adequadamente:

$3x^2y^3$ { coeficiente: 3 ; parte literal: x^2y^3 }

$-2x^3y^2$ { coeficiente: -2 ; parte literal: x^3y^2 }

$\frac{3}{4}x^3y^2$ { coeficiente: $\frac{3}{4}$; parte literal: x^3y^2 }

$-y^4$ { coeficiente: -1 ; parte literal: y^4 }

$\frac{4}{5}abx^2$ { coeficiente: $\frac{4}{5}$; parte literal: abx^2 }

$-\frac{2}{5}y^4$ { coeficiente: $-\frac{2}{5}$; parte literal: y^4 }

$-\frac{5}{3}xy$ { coeficiente: $-\frac{5}{3}$; parte literal: xy }

$6xy$ { coeficiente: 6 ; parte literal: xy }

$-5y^4$ { coeficiente: -5 ; parte literal: y^4 }

$7x^3$ { coeficiente: 7 ; parte literal: x^3 }

$-x^2y^3$ { coeficiente: -1 ; parte literal: x^2y^3 }

$-abx^2$ { coeficiente: -1 ; parte literal: abx^2 }

Escreva agora os termos semelhantes:

$3x^2y^3$ e $-x^2y^3$, $\frac{3}{4}x^3y^2$ e $-2x^3y^2$, $\frac{4}{5}abx^2$ e $-abx^2$, $-\frac{5}{3}xy$ e $6xy$, $-5y^4$, $-y^4$ e $-\frac{2}{5}y^4$.

Analisemos agora o monômio: $2x^2y^3$.

A soma dos expoentes das letras revelará o grau do monômio.

Veja:

$$2 + 3 = 5$$

$2x^{\boxed{2}}y^{\boxed{3}}$: monômio do 5.º grau

Pode-se, no entanto, indicar o grau de um monômio em relação a uma determinada letra:

$2x^{\boxed{2}}y^3$: monômio do 2.º grau em relação a **x**

$2x^2y^{\boxed{3}}$: monômio do 3.º grau em relação a **y**

EXERCÍCIOS

a) Indique o grau de cada monômio:

1) $3ax^2$

grau: 3

grau em relação a **a**: 1

grau em relação a **x**: 2

2) $5b^3y^4$

grau: 7

grau em relação a **b**: 3

grau em relação a **y**: 4

3) $7xy^5$

grau: 6

grau em relação a **x**: 1

grau em relação a **y**: 5

4) $-\frac{3}{5}a^5b^6$

grau: 11

grau em relação a **a**: 5

grau em relação a **b**: 6

5) $-x^2y^3z^2$

grau: 7

grau em relação a **x**: 2

grau em relação a **y**: 3

grau em relação a **z**: 2

6) $6xy$

grau: 2

grau em relação a **x**: 1

grau em relação a **y**: 1

b) Escreva o monômio que apresenta:

1) coeficiente $= -2$

2.° grau em relação a **x**

5.° grau em relação a **y**

Monômio: $-2x^2y^5$

2) coeficiente $= -1$

5.° grau em relação a **a**

3.° grau em relação a **x**

Monômio: $-a^5x^3$

3) coeficiente $= -\frac{1}{2}$

1.° grau em relação a **a**

2.° grau em relação a **x**

3.° grau em relação a **y**

Monômio: $-\frac{1}{2}ax^2y^3$

4) coeficiente $= -3$

1.° grau em relação a **x**

10.° grau em relação a **y**

Monômio: $-3xy^{10}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Associe a coluna da esquerda com a da direita, relacionando os termos semelhantes:

1) $\frac{2}{5}ax^2bc$

2) $-5xy$

3) -3

4) $\frac{\sqrt{3}}{2}ac$

5) a

6) $-\frac{2}{5}x^2y^3z^4$

(6) $-x^2y^3z^4$

(4) $-\frac{1}{2}ac$

(1) $-ax^2bc$

(3) 4

(2) $\frac{1}{3}xy$

(5) $9a$

Você obteve na coluna da direita, de cima para baixo, o numeral 641325.

b) Dê o grau de cada monômio, em relação a **x**:

1) $-5ax^2bc$: 2

2) $-3x^4yz^2$: 4

3) $-\frac{9}{2}xy^2$: 1

4) $-\sqrt{2}x^4y$: 4

5) $-ax^6y^5$: 6

6) $-4x$: 1

7) $-x^3y$: 3

8) $45a^2bx^7$: 7

9) $\frac{3}{4}xy^5$: 1

O VALOR NUMÉRICO DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA

Denominamos valor numérico (V.N.) de uma expressão algébrica o valor que ela assume quando as letras são substituídas por determinados valores.

Veja:

	1.º passo	2.º passo	3.º passo
Passos	Reescreva a expressão, colocando parênteses no lugar das letras e conservando os expoentes e os radicais, se existirem.	Coloque nos respectivos parênteses os valores dados para cada letra.	Efetue as operações. O resultado encontrado será o V.N.
Expressão: $2\sqrt{a} + 3b^2$, $a = 64$, $b = -2$	$2\sqrt{(\ \ )} + 3(\ \ )^2$	$2\sqrt{(64)} + 3(-2)^2$	$2\sqrt{(64)} + 3(-2)^2$ $2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 = 28$ Então: V.N. = 28

VAMOS EXERCITAR

a) Complete os quadros:

1)

Passos	$3x^2 + \frac{2y}{5}$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = 10 \end{cases}$	$2a^2b - 3ab^2$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$	$3\sqrt{xy} + 2$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 12 \end{cases}$
1.º passo	$3(\ )^2 + \frac{2(\ )}{5}$	$2(\ )^2(\ ) - 3(\ )(\ )^2$	$3\sqrt{(\ )(\ )} + 2$
2.º passo	$3(-2)^2 + \frac{2(10)}{5}$	$2(-1)^2(-2) - 3(-1)(-2)^2$	$3\sqrt{(3)(12)} + 2$
3.º passo	$3 \cdot 4 + \frac{20}{5}$ $12 + 4 = 16$ Então: V.N. = 16	$2 \cdot 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \cdot 4$ $-4 + 12 = 8$ Então: V.N. = 8	$3\sqrt{36} + 2$ $3 \cdot 6 + 2$ $18 + 2 = 20$ Então: V.N. = 20

2)

Passos	$8x^2 - 2xy$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$	$6ab + \sqrt{b}$ $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$	$a^2 + 2ab + 1$ $\begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$
1.º passo	$8(\ )^2 - 2(\ )(\ )$	$6(\ )(\ ) + \sqrt{(\ )}$	$(\ )^2 + 2(\ )(\ ) + 1$
2.º passo	$8\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)(-1)$	$6\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)}$	$(-3)^2 + 2(-3)\left(\frac{1}{2}\right) + 1$
3.º passo	$8 \cdot \frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{2}\right)(-1)$ $2 + 1 = 3$ Então: V.N. = 3	$6 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ Então: V.N. = 1	$9 - 3 + 1 = 7$ Então: V.N. = 7

b) Determine o valor numérico das expressões, nas condições estabelecidas:

1) $3x^2 - 5y$, para $x = 3$ e $y = 2$ (17)

2) $3x^2y - 5x + 3y$, para $x = 2$ e $y = \frac{1}{3}$ (-5)

3) $2xy + 3y - 5x$, para $x = \frac{1}{5}$ e $y = \frac{1}{2}$ ($\frac{7}{10}$)

4) $3a^3 - 2a^2 + a$, para $a = 2$ (18)

5) $3a^2 - 2ab - b^2$, para $a = 3$ e $b = 2$ (11)

6) $ab^2 + 2ab - 3b$, para $a = 1$ e $b = 3$ (6)

7) $a^3bd + d$, para $a = 3$, $b = 4$ e $d = 0$ (0)

8) $3\sqrt{x^3} - 5x^2y$, para $x = 1$ e $y = -\frac{1}{5}$ (4)

9) $\frac{x^2 + 3}{2} - \frac{xy + 1}{3}$, para $x = 2$ e $y = 1$ ($\frac{5}{2}$)

10) $4xy + 3$, para $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$ (4)

11) $y^2 + 3y - 10$, para $y = 2$ (0)

12) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{4}y$, para $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{3}$ ($-\frac{1}{20}$)

13) $\frac{a - 1}{b + 2}$, para $a = 4$ e $b = 1$ (1)

14) $(x - y)^2$, para $x = \frac{1}{3}$ e $y = \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{36}$)

15) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2$, para $x = 2$ (17)

16) $\sqrt{2x + 1}$, para $x = 4$ (3)

17) $\sqrt{3x^2 + 4}$, para $x = 2$ (4)

18) $\sqrt{5x - 1} + 2y$, para $x = 2$ e $y = \frac{1}{2}$ (4)

A REDUÇÃO DE TERMOS SEMELHANTES

Observe a expressão: $3x^2 + 5x^2$.

Perceba que ela é constituída por dois termos semelhantes.

Pois bem, quando uma expressão algébrica é constituída por dois ou mais termos semelhantes, eles podem ser reduzidos a um único termo.

> Regra: Efetua-se a adição ou a subtração dos coeficientes e conserva-se a parte literal.

Veja:

$$3 + 5 = 8$$

$$\boxed{3}x^2 + \boxed{5}x^2 = \boxed{8}x^2$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5 - 4}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}}x - \boxed{\frac{2}{5}}x = \boxed{\frac{1}{10}}x$$

$$3 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{6 - 1 + 4}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\boxed{3}xy - \boxed{\frac{1}{2}}xy + \boxed{2}xy = \boxed{\frac{9}{2}}xy$$

Reduza os termos semelhantes:

1) $x + x =$ $2x$

2) $2x + 3x =$ $5x$

3) $5x^2 - 2x^2 =$ $3x^2$

4) $4a + 2a - 3a =$ $3a$

5) $\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y =$ $\frac{5}{6}y$

6) $\frac{3}{5}xy + \frac{2}{5}xy =$ xy

7) $9x^2y - 3x^2y =$ $6x^2y$

8) $4ab^2 - 6ab^2 =$ $-2ab^2$

9) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{2} =$ $-\frac{5x}{6}$

10) $\frac{3y}{5} + \frac{7y}{10} - \frac{2y}{5} =$ $\frac{9y}{10}$

11) $3x^4 - 5x^4 + x^4 =$ $-x^4$

12) $2x^2y^3 - 5x^2y^3 + 7x^2y^3 =$ $4x^2y^3$

13) $5m - 4m + 3m + 2m =$ $6m$

14) $\frac{2x}{3} - \frac{5x}{4} + \frac{x}{2} =$ $-\frac{x}{12}$

15) $\frac{3x^2}{4} - \frac{2x^2}{5} + \frac{x^2}{10} =$ $\frac{9x^2}{20}$

16) $\frac{5y}{3} - \frac{y}{4} - \frac{7y}{6} =$ $\frac{y}{4}$

17) $\frac{2x^2y^5}{3} - \frac{x^2y^5}{5} - \frac{3x^2y^5}{2} =$ $-\frac{31}{30}x^2y^5$

18) $ab^2 - 7ab^2 =$ $-6ab^2$

19) $3a^2b - \frac{1}{2}a^2b =$ $\frac{5}{2}a^2b$

20) $\frac{1}{3}xy^3 + xy^3 - \frac{1}{2}xy^3 =$ $\frac{5}{6}xy^3$

21) $2a^3 + 5a^3 - 8a^3 =$ $-a^3$

22) $\frac{3a}{2} - \frac{2a}{3} =$ $\frac{5a}{6}$

23) $\frac{a^2bx}{5} + \frac{3a^2bx}{4} =$ $\frac{19}{20}a^2bx$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Encontre o valor numérico das expressões:

1) $(a - b) - (a + b)$, para $a = 5$ e $b = 2$ (-4)

2) $3(x + y) - 2x$, para $x = 2$ e $y = -3$ (-7)

3) $(x + 2)^3$, para $x = \frac{1}{2}$ ($\frac{125}{8}$)

4) $(2x + 3)^2$, para $x = -\frac{1}{2}$ (4)

5) $a^2b - \frac{b}{4} + \frac{a}{3}$, para $a = 3$ e $b = 8$ (71)

6) $a^2b - ab^2$, para $a = -1$ e $b = 2$ (6)

b) Associe a coluna da direita com a da esquerda:

1) $3x - x + 8x$	(6) $-\frac{x}{10}$
2) $5xy - xy$	(4) $\frac{x}{6}$
3) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{4}$	(3) $-\frac{x}{12}$
4) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3}$	(2) $4xy$
5) $\frac{xy}{4} - \frac{3xy}{8}$	(1) $10x$
6) $\frac{x}{5} - \frac{3x}{10}$	(5) $-\frac{xy}{8}$

Você obteve na coluna da direita, de cima para baixo, o numeral 643215.

AS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS E AS OPERAÇÕES

Agora vamos aprender as seguintes operações:
• adição algébrica de monômios; • adição algébrica de polinômios; • multiplicação de monômios; • multiplicação de monômio por polinômio; • multiplicação de polinômio por polinômio; • divisão de monômio por monômio; • divisão de polinômio por monômio; • divisão de polinômio por polinômio; • potenciação de monômios.

ADIÇÃO ALGÉBRICA DE MONÔMIOS

Regra: Faz-se a eliminação dos parênteses e, a seguir, a redução dos termos semelhantes, se existirem.

Exemplos:

1). $(4x) + (-8x) + (+5x) - (+3x) - (-7x)$

$\quad -\quad\quad +\quad\quad -\quad\quad +$

$4x - 8x + 5x - 3x + 7x =$

$(4 - 8 + 5 - 3 + 7)x = 5x$

2) $(+5ax) - (-2ay) + (-3ax) + (-6ay)$

$\quad +\quad\quad -\quad\quad -$

$5ax + 2ay - 3ax - 6ay$

$\boxed{5ax - 3ax}\ \boxed{+ 2ay - 6ay}$

$2ax - 4ay = 2ax - 4ay$

VAMOS EXERCITAR

a) Elimine os parênteses:

1) $(+a) - (-b) - (+c) =$ $a + b - c$
2) $(-x) + (-y) - (+z) =$ $-x - y - z$
3) $(-p) - (-q) + (+r) =$ $-p + q + r$
4) $(+m) - (+n) - (-t) =$ $m - n + t$
5) $(+5xy) - (+3x) - (+2y) =$ $5xy - 3x - 2y$
6) $(-7abx) + (-3ab) - (+2a) =$ $-7abx - 3ab - 2a$
7) $\left(+\frac{2}{3}x^4\right) - \left(+\frac{1}{4}x^3\right) - \left(-\frac{1}{3}x^2\right) =$ $\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2$
8) $\left(+\frac{1}{4}xy^3\right) + \left(+\frac{1}{5}xy^2\right) - \left(-\frac{1}{6}xy\right) =$ $\frac{1}{4}xy^3 + \frac{1}{5}xy^2 + \frac{1}{6}xy$
9) $\left(+\frac{4}{5}ax^2\right) - \left(-\frac{2}{3}ax\right) + \left(+\frac{1}{2}a\right) =$ $\frac{4}{5}ax^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{1}{2}a$
10) $\left(-\frac{3}{8}abc\right) + \left(+\frac{2}{7}ab\right) - \left(-\frac{1}{5}a\right) - \left(+\frac{2}{3}b\right) =$ $-\frac{3}{8}abc + \frac{2}{7}ab + \frac{1}{5}a - \frac{2}{3}b$

b) Efetue as adições algébricas:

1) $(+x) - (-2x) =$ $3x$
2) $(+5a) - (-6a) =$ $11a$
3) $(+2y) - (+3y) + (-4y) =$ $-5y$
4) $(+3ab) - (-ab) + (+ab) =$ $5ab$
5) $(-6xy) - (-3xy) + (-5xy) =$ $-8xy$
6) $(-2m) - (+3m) - (-m) + (+m) =$ $-3m$
7) $(-7ab^2) - (-3ab^2) + (+2ab^2) =$ $-2ab^2$
8) $\left(+\frac{1}{2}x\right) - \left(-\frac{1}{3}x\right) =$ $\frac{5}{6}x$
9) $\left(+\frac{2}{5}x^2\right) + \left(-\frac{1}{4}x^2\right) =$ $\frac{3}{20}x^2$
10) $\left(-\frac{3}{4}xy\right) - \left(-\frac{1}{2}xy\right) =$ $-\frac{1}{4}xy$
11) $(-2a) - (-3b) + (-5a) + (+b) =$ $-7a + 4b$
12) $(+12x) - (+3y) - (-3x) + (-4y) =$ $15x - 7y$
13) $(-15ab) - (-6ax) + (+12ab) - (-ab) =$ $-2ab + 6ax$
14) $(+x) - (-y) + (+y) - (-x) =$ $2x + 2y$
15) $(+10p) + (+12p) - (+6q) - (-5q) =$ $22p - q$

ADIÇÃO ALGÉBRICA DE POLINÔMIOS

Regra: Faz-se a eliminação dos parênteses e, a seguir, a redução dos termos semelhantes, se existirem.

Exemplo:

$$(2x^2 + 5y + 3x) - (-3x^2 + 2y - 4x) =$$

$$2x^2 + 5y + 3x + 3x^2 - 2y + 4x =$$

$$\underbrace{2x^2 + 3x^2}_{5x^2} + \underbrace{5y - 2y}_{+3y} + \underbrace{3x + 4x}_{+7x} = 5x^2 + 3y + 7x$$

EXERCÍCIOS

a) Elimine os parênteses:

1) $(a + b + c) - (-x + y) =$ $a + b + c + x - y$

2) $(2a - 3b) - (+4x - 5y) =$ $2a - 3b - 4x + 5y$

3) $(3ax^2 - 5ax) + (-6a + 7b) =$ $3ax^2 - 5ax - 6a + 7b$

4) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right) - \left(-\frac{1}{5}a + \frac{1}{6}b\right) =$ $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{5}a - \frac{1}{6}b$

5) $(3x^3 - 5x^2 - 6x) + (-7y^3 - 6y^2 + 5y) =$ $3x^3 - 5x^2 - 6x - 7y^3 - 6y^2 + 5y$

6) $(10ab - 8xy) - (-7ax + 8ay - by) =$ $10ab - 8xy + 7ax - 8ay + by$

7) $\left(-\frac{1}{3}x^5 + \frac{2}{7}x^4\right) + \left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 4\right) =$ $-\frac{1}{3}x^5 + \frac{2}{7}x^4 + \frac{3}{4}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 4$

8) $\left(-\frac{4}{7}x - \frac{2}{5}y\right) - \left(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{6}c\right) =$ $-\frac{4}{7}x - \frac{2}{5}y + \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c$

9) $(+4a - 5b + 7c) + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right) =$ $4a - 5b + 7c - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$

10) $(p + q + r) - (-a - b - c) =$ $p + q + r + a + b + c$

b) Efetue as adições algébricas:

1) $(x + y) - (-x - y) =$ $2x + 2y$

2) $(3a - 2b) + (-a + 4b) =$ $2a + 2b$

3) $(5x^2 - 6x + 7y) - (-x^2 + 3x) =$ $6x^2 - 9x + 7y$

4) $(6x^3 + 8y - 3) + (-2x^3 - 5y + 1) =$ $4x^3 + 3y - 2$

5) $\left(+\frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y\right) - \left(-\frac{1}{3}y + \frac{2}{5}x\right) =$ $-\frac{1}{5}x - \frac{1}{3}y$

6) $\left(-\frac{3}{4}ax^2 - 2xy\right) - \left(+5xy - \frac{1}{2}ax^2\right) =$ $-\frac{1}{4}ax^2 - 7xy$

7) $\left(\frac{1}{6}a - \frac{2}{3}b\right) + \left(-\frac{1}{3}b + \frac{1}{3}a\right) =$ $\frac{1}{2}a - b$

8) $\left(-\frac{3}{10}ab + 5xy\right) - \left(-\frac{1}{5}ab - xy\right) =$ $-\frac{1}{10}ab + 6xy$

9) $(5x^3 - 3ax^2 + 5a^3) + (7a^3 + 2x^3 + 3ax^2) =$ $7x^3 + 12a^3$

10) $(3xy^2 + x^3 + y^3) - (2x^3 + 3y^3) + (-5xy^2 + 6y^3) =$ $-2xy^2 - x^3 + 4y^3$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Elimine os parênteses:

1) $(+2a) - (-2b) + (-3c) =$ $2a + 2b - 3c$

2) $\left(-\frac{1}{2}x\right) + \left(+\frac{2}{3}y\right) =$ $-\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y$

3) $\left(-\frac{3}{5}x\right) - \left(-\frac{1}{4}x^2\right) =$ $-\frac{3}{5}x + \frac{1}{4}x^2$

4) $(-5xy^2) + (+2x^2y) =$ $-5xy^2 + 2x^2y$

5) $\left(+\frac{3}{4}ab^2\right) - (+3a^2b) =$ $+\frac{3}{4}ab^2 - 3a^2b$

6) $(-3x^2) - (-2x) =$ $-3x^2 + 2x$

7) $-(-5y^3) + (+2y^2) - (-3y) =$ $5y^3 + 2y^2 + 3y$

8) $\left(+\frac{4}{5}xy^3\right) - \left(+\frac{1}{4}xy^2\right) + \left(-\frac{1}{3}xy\right) =$ $\frac{4}{5}xy^3 - \frac{1}{4}xy^2 - \frac{1}{3}xy$

9) $(-6ab^2x) + (+7a^2bx) - (-8abx^2) =$ $-6ab^2x + 7a^2bx + 8abx^2$

10) $\left(-\frac{2}{7}x^5\right) + \left(-\frac{1}{5}x^4\right) - \left(+\frac{3}{5}x^3\right) - \left(-\frac{2}{3}x^2\right) =$ $-\frac{2}{7}x^5 - \frac{1}{5}x^4 - \frac{3}{5}x^3 + \frac{2}{3}x^2$

b) Elimine os parênteses e os colchetes:

1) $(+3x^3) - [(-5x^2) - (-2x) + (+y)] =$ $3x^3 + 5x^2 - 2x - y$

2) $\left(-\frac{1}{2}xy^2\right) + [(-3x^2y) - (+5x) - (-y)] =$ $-\frac{1}{2}xy^2 - 3x^2y - 5x + y$

3) $(-7y^4) - [(+3y^3) - (-y^2) - (-4y) + (+1)] =$ $-7y^4 - 3y^3 - y^2 - 4y - 1$

4) $-[(+6ab^3) - (-ab^2) + (-4ab) + (+3)] =$ $-6ab^3 - ab^2 + 4ab - 3$

c) Elimine os parênteses, os colchetes e as chaves:

1) $(-2x) - \{(+2x^2) - [(-5x^3 + 4x^4) - (x^5 - x^6)]\} =$ $-2x - 2x^2 - 5x^3 + 4x^4 - x^5 + x^6$

2) $\{(-5a) - [(-4x) - (-3y)] + (2b - 7)\} =$ $-5a + 4x - 3y + 2b - 7$

3) $(-a) + \{[(+b) - (-c) + (+d)] - (+e)\} =$ $-a + b + c + d - e$

4) $(+x) - \{(-2y) - [(+3a - 3b) - (+4m - 1)]\} =$ $x + 2y + 3a - 3b - 4m + 1$

d) Efetue as adições algébricas:

1) $(+4a) - (-5a) =$ $9a$

2) $(+2x) + (-3x) =$ $-x$

3) $(-7y) - (+3y) =$ $-10y$

4) $(-8ab) + (-7ab) - (-ab) =$ $-14ab$

5) $\left(-\frac{1}{2}m\right) + \left(-\frac{1}{3}m\right) =$ $-\frac{5}{6}m$

6) $\left(+\frac{2}{5}y\right) - \left(-\frac{3}{5}y\right) =$ y

7) $\left(-\frac{1}{4}x^2\right) - \left(+\frac{1}{3}x^2\right) =$ $-\frac{7}{12}x^2$

8) $\left(+\frac{1}{6}xy\right) - \left(-\frac{1}{2}xy\right) + \left(-\frac{1}{12}xy\right) =$ $\frac{7}{12}xy$

9) $(+6a) - (-5b) + (+3a) - (+2b) =$ $9a + 3b$

10) $(-8x) + (+2y) - (-6y) - (+10x) =$ $-18x + 8y$

e) Elimine os sinais de associação e efetue as adições algébricas:

1) $(+5x) - [(-3x) - (+2x)] =$ $10x$

2) $(-3a) + [(+5a) - (-4a) + (-a)] =$ $5a$

3) $(+7y) - [(-3y) + (+2y) - (+4y)] =$ $12y$

4) $(+6a) - [(-8b) - (+5a) - (-2b)] =$ $11a + 6b$

5) $(-2x) + [(+4y) - (-4y) + (+3x)] =$ $x + 8y$

6) $(+8x^2) - \{[(-3y^2) - [(+7x^2) - (+6y^2)]]\} =$ $15x^2 - 3y^2$

7) $\left(-\frac{1}{2}a\right) - \left[\left(+\frac{2}{3}a\right) - \left(-\frac{1}{4}a\right)\right] =$ $-\frac{17}{12}a$

8) $\left(+\frac{2}{5}x^3\right) - \left[\left(-\frac{1}{4}x\right) - \left(+\frac{1}{5}x^3\right) + \left(-\frac{1}{2}x\right)\right] =$ $\frac{3}{5}x^3 + \frac{3}{4}x$

9) $\left(-\frac{1}{4}ax\right) - \left\{\left(-\frac{1}{2}ax\right) - \left[\left(-\frac{2}{5}ay\right) - \left(+\frac{3}{10}ay\right)\right]\right\} =$ $\frac{1}{4}ax - \frac{7}{10}ay$

10) $(3x^2 + y^2) - (2x^2 - 3y^2) =$ $x^2 + 4y^2$

11) $(2x^2 + 3x - 5) - (+3x^2 - 2x + 7) =$ $-x^2 + 5x - 12$

12) $(3xy + 5x - 2y) - (2xy - 3y) =$ $xy + 5x + y$

MULTIPLICAÇÃO DE MONÔMIOS

Regra: Efetuam-se a multiplicação dos coeficientes e a multiplicação das partes literais.

Exemplos:

1) $5x^3 \cdot 2x^4 = 10\, x^{3+4} = 10x^7$

2) $\left(\frac{1}{2}a^2b^4\right) \cdot \left(\frac{2}{3}a^4\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} a^{2+4}\, b^4 = \frac{1}{3} a^6b^4$

Efetue:

1) $2x \cdot x =$ $2x^2$

2) $m^2 \cdot m =$ m^3

3) $y^4 \cdot y^2 =$ y^6

4) $3x^2 \cdot 2x^2 =$ $6x^4$

5) $4y^3 \cdot 3y \cdot y^2 =$ $12y^6$

6) $\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{3}x^2 =$ $\frac{1}{6}x^3$

7) $\frac{1}{4}y^4 \cdot \frac{1}{3}y^3 =$ $\frac{1}{12}y^7$

8) $2x^4y \cdot 4xy^4 =$ $8x^5y^5$

9) $5a^3b^2 \cdot 2a^2b =$ $10a^5b^3$

10) $x^4y^3 \cdot x^2y^2 =$ x^6y^5

11) $2xy \cdot 3xy \cdot xy =$ $6x^3y^3$

12) $\frac{3}{4}ab^2c^3 \cdot 2a^2b^3c =$ $\frac{3}{2}a^3b^5c^4$

13) $x^5 \cdot x^2 \cdot x^3 =$ x^{10}

14) $(-3a^2b) \cdot (-2ab^2) =$ $6a^3b^3$

15) $(-2x^2y^4) \cdot (5x^3y^3) =$ $-10x^5y^7$

16) $(xy^2) \cdot (2x^2y) \cdot (5x^3y) =$ $10x^6y^4$

17) $(3a^3b^2) \cdot (-2a^5) =$ $-6a^8b^2$

18) $(2a^2b^5) \cdot (3b^3) =$ $6a^2b^8$

19) $(-5x^2y^4) \cdot (7x^4y^3) \cdot (-xy) =$ $35x^7y^8$

20) $\left(-\frac{1}{2}x^3\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}x^2\right) =$ $+\frac{1}{5}x^5$

Complete o quadro:

X	$2x^2$	$\frac{1}{2}a^2b$	$-\frac{2}{3}a^3b^4$	$-4y^3$
x^2y	$2x^4y$	$\frac{1}{2}a^2bx^2y$	$-\frac{2}{3}a^3b^4x^2y$	$-4x^2y^4$
$-3a^2$	$-6a^2x^2$	$-\frac{3}{2}a^4b$	$2a^5b^4$	$12a^2y^3$
$-\frac{1}{2}x^3$	$-x^5$	$-\frac{1}{4}a^2bx^3$	$\frac{1}{3}a^3b^4x^3$	$2x^3y^3$
$-y^5$	$-2x^2y^5$	$-\frac{1}{2}a^2by^5$	$\frac{2}{3}a^3b^4y^5$	$4y^8$
$\frac{1}{3}b^2$	$\frac{2}{3}b^2x^2$	$\frac{1}{6}a^2b^3$	$-\frac{2}{9}a^3b^6$	$-\frac{4}{3}b^2y^3$

MULTIPLICAÇÃO DE MONÔMIO POR POLINÔMIO

Regra: Efetua-se a multiplicação do monômio por todos os termos do polinômio (propriedade distributiva).

Exemplo:

$$2x^2 \cdot (3x + 2x^2 - 4x^3) = 6x^3 + 4x^4 - 8x^5$$

$6x^3$

$+4x^4$

$-8x^5$

Efetue as multiplicações:

1) $2x \cdot (3x^3 - 2x^2 - 4)$ $6x^4 - 4x^3 - 8x$
2) $3x^2 \cdot (2x^3 - 4x^2 - 5x) =$ $6x^5 - 12x^4 - 15x^3$
3) $4a^3 \cdot (2a - 3a^2 - 4a^3) =$ $8a^4 - 12a^5 - 16a^6$
4) $y \cdot (3y^2 - 5y^3) =$ $3y^3 - 5y^4$
5) $5xy^2 \cdot (2x - 3y) =$ $10x^2y^2 - 15xy^3$
6) $3ab \cdot (4a^2 - b^2) =$ $12a^3b - 3ab^3$
7) $2a \cdot (a^2 - b^2) =$ $2a^3 - 2ab^2$
8) $m \cdot (m + m^2) =$ $m^2 + m^3$
9) $x^2 \cdot (x^2 - x^3) =$ $x^4 - x^5$
10) $2x^4 \cdot (x^5 - x^4 - x^3 + x^2) =$ $2x^9 - 2x^8 - 2x^7 + 2x^6$
11) $(-x) \cdot (-2x + 3x^2) =$ $2x^2 - 3x^3$
12) $(-3m^2) \cdot (-4m^2 - 5m) =$ $12m^4 + 15m^3$
13) $(-2a^2b) \cdot (5ab - 4a^3b) =$ $-10a^3b^2 + 8a^5b^2$
14) $(-5x^2y) \cdot (-2xy + 4x^3y^2) =$ $10x^3y^2 - 20x^5y^3$
15) $\frac{3}{5}x^2 \cdot \left(2x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right) =$ $\frac{6}{5}x^5 - x^4 + \frac{2}{5}x^3$
16) $\frac{2}{5}x^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x\right) =$ $\frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{10}x^6 + \frac{2}{15}x^3$

Complete o quadro:

X	$4x^2 - 6x$	$2x^3y - 3xy^3$	$5xy + 3x^2$
$2x$	$8x^3 - 12x^2$	$4x^4y - 6x^2y^3$	$10x^2y + 6x^3$
$-5x^2$	$-20x^4 + 30x^3$	$-10x^5y + 15x^3y^3$	$-25x^3y - 15x^4$
$\frac{1}{2}x$	$2x^3 - 3x^2$	$x^4y - \frac{3}{2}x^2y^3$	$\frac{5}{2}x^2y + \frac{3}{2}x^3$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Efetue as multiplicações que constam dos quadros:

X	$3a$	$5a^2$	$\frac{1}{4}x^2y$	$-\frac{2}{5}m^3n$	$-\frac{1}{2}a^3x$	$6a^2bx$
$-\frac{1}{3}a^2$	$-a^3$	$-\frac{5}{3}a^4$	$-\frac{1}{12}a^2x^2y$	$+\frac{2}{15}a^2m^3n$	$\frac{1}{6}a^5x$	$-2a^4bx$
$2x^3$	$6ax^3$	$10a^2x^3$	$\frac{1}{2}x^5y$	$-\frac{4}{5}x^3m^3n$	$-a^3x^4$	$12a^2bx^4$
$\frac{1}{5}xy$	$\frac{3}{5}axy$	a^2xy	$\frac{1}{20}x^3y^2$	$-\frac{2}{25}xym^3n$	$-\frac{1}{10}a^3x^2y$	$\frac{6}{5}a^2bx^2y$
$-y^4$	$-3ay^4$	$-5a^2y^4$	$-\frac{1}{4}x^2y^5$	$\frac{2}{5}y^4m^3n$	$\frac{1}{2}a^3xy^4$	$-6a^2bxy^4$
$-mn^2$	$-3amn^2$	$-5a^2mn^2$	$-\frac{1}{4}x^2ymn^2$	$\frac{2}{5}m^4n^3$	$\frac{1}{2}a^3xmn^2$	$-6a^2bxmn^2$

X	$3x^2 - 5a$	$2a^2b + 6a$	$a^2 - 3x + b$	$3ax^2 + 4x^3 - 2$
$2x$	$6x^3 - 10ax$	$4a^2bx + 12ax$	$2a^2x - 6x^2 + 2bx$	$6ax^3 + 8x^4 - 4x$
$-\frac{1}{2}ab$	$-\frac{3}{2}abx^2 + \frac{5}{2}a^2b$	$-a^3b^2 - 3a^2b$	$-\frac{1}{2}a^3b + \frac{3}{2}abx - \frac{1}{2}ab^2$	$-\frac{3}{2}a^2bx^2 - 2abx^3 + ab$
$-3a^3$	$-9a^3x^2 + 15a^4$	$-6a^5b - 18a^4$	$-3a^5 + 9a^3x - 3a^3b$	$-9a^4x^2 - 12a^3x^3 + 6a^3$
$4a^2x$	$12a^2x^3 - 20a^3x$	$8a^4bx + 24a^3x$	$4a^4x - 12a^2x^2 + 4a^2bx$	$12a^3x^2 + 16a^2x^4 - 8a^2x$

MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIO POR POLINÔMIO

Regra: Efetua-se a multiplicação de cada termo de um dos polinômios por todos os termos do outro polinômio e, a seguir, reduzem-se os termos semelhantes, se existirem.

Exemplo:

Encontre o produto:

1) $(x + 1) \cdot (x + 2) = x^2 + 3x + 2$

2) $(2x + 3) \cdot (x - 4) = 2x^2 - 5x - 12$

3) $(2x^2 - 3x) \cdot (x + 2) = 2x^3 + x^2 - 6x$

4) $(2a + b) \cdot (3a + 2b) = 6a^2 + 7ab + 2b^2$

5) $(x^2 + 2x) \cdot (x + 5) = x^3 + 5x^2 + 14x$

6) $(3x^2 + 5x) \cdot (x^2 + 3x) = 3x^4 + 14x^3 + 15x^2$

7) $(x + 2y) \cdot (2x - y) = 2x^2 + 3xy - 2y^2$

8) $(3a - b) \cdot (a + 2) = 3a^2 - ab + 6a - 2b$

9) $(2ab + a) \cdot (3ab - 2a) = 6a^2b^2 - a^2b - 2a^2$

10) $(x + y) \cdot (x + y) = x^2 + 2xy + y^2$

11) $(2x + 3) \cdot (3x - 2) = 6x^2 + 5x - 6$

12) $(3x^2 - 5) \cdot (2x^2 - 3) = 6x^4 - 19x^2 + 15$

13) $(x^2 - x) \cdot (x^2 + 2x - 1) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x$

14) $(x^2 + 5x + 6) \cdot (x + 1) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

15) $(2a^2 - b) \cdot (3a^2 + 2b - 2) = 6a^4 + a^2b - 4a^2 - 2b^2 + 2b$

16) $(x + y) \cdot \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}y\right) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}xy - \frac{1}{2}y^2$

DIVISÃO DE MONÔMIO POR MONÔMIO

Regra: Efetuam-se a divisão dos coeficientes e a divisão das partes literais.

Exemplo:

$$(10\,x^5) : (2\,x^3) = 5x^{5-3} = 5x^2$$

Se a divisão dos coeficientes não for exata, indica-se o quociente na forma de fração:

$$2a^3b^4 : 3ab^2 = \frac{2}{3}a^{3-1}\,b^{4-2} = \frac{2}{3}a^2b^2$$

Encontre o quociente:

1) $x^3 : x = x^2$

2) $2x^4 : x^2 = 2x^2$

3) $a^5 : a^2 = a^3$

4) $6a^3 : 3a = 2a^2$

5) $12m^7 : 4m^4 = 3m^3$

6) $15a^5b^3 : 3a^2b^2 = 5a^3b$

7) $(-24x^7y^4) : (-6xy^3) = 4x^6y$

8) $(-30a^2b^3x^4) : (+5abx) = -6ab^2x^3$

9) $\frac{1}{2}x^5 : \frac{1}{3}x^2 = \frac{3}{2}x^3$

10) $\frac{2}{3}a^4b^2 : \frac{1}{3}a^2b = 2a^2b$

11) $\left(-\frac{3}{5}m^6\right) : (-2m^2) = \frac{3}{10}m^4$

12) $\left(-\frac{4}{5}a^2bx^3\right) : (-2ax^2) = \frac{2}{5}abx$

13) $(-3a^2b^4) : (-5ab^2) = \frac{3}{5}ab^2$

14) $4x^6 : 3x^3 = \frac{4}{3}x^3$

15) $(-2x^3y^2) : (-3xy) = \frac{2}{3}x^2y$

16) $(+12a^4b^3c) : (-18a^2b^2) = -\frac{2}{3}a^2bc$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Complete os quadros:

X	$x - 2$	$2x + 3$	$2x^2 - 5$	$3x^2 + 2x$
$x - 3y$	$x^2 - 3xy - 2x + 6y$	$2x^2 - 6xy + 3x - 9y$	$2x^3 - 5x - 6x^2y - 15y$	$3x^3 + 2x^2 - 9x^2y - 6xy$
$2x^2 + 5y^2$	$2x^3 + 5xy - 4x^2 - 10y$	$4x^3 + 10xy^2 + 6x^2 + 15y^2$	$4x^4 - 10x^2 + 10x^2y^2 - 25y^2$	$6x^4 + 4x^3 + 15x^2y^2 + 10xy^2$
$2x + 7$	$2x^2 + 3x - 14$	$4x^2 + 20x + 21$	$4x^3 + 14x^2 - 10x - 35$	$6x^3 + 25x^2 + 14x$
$3x^2 - 5x$	$3x^3 - 11x^2 + 10x$	$6x^3 - x^2 - 15x$	$6x^4 - 10x^3 - 15x^2 + 25x$	$9x^4 - 9x^3 - 10x^2$

Divisor / Dividendo	$8x^2$	$4x^3y^2$	$2y^2$	$-\frac{1}{2}x^2y^2$
$16x^4y^5$	$2x^2y^5$	$4xy^3$	$8x^4y^3$	$-32x^2y^3$
$\frac{2}{3}x^6y^4$	$\frac{1}{12}x^4y^4$	$\frac{1}{6}x^3y^2$	$\frac{1}{3}x^6y^2$	$-\frac{4}{3}x^4y^2$
$-\frac{1}{2}a^2x^3y^2$	$-\frac{1}{16}a^2xy^2$	$-\frac{1}{8}a^2$	$-\frac{1}{4}a^2x^3$	$1a^2x$
$15a^5x^5y^3$	$\frac{15}{8}a^5x^3y^3$	$\frac{15}{4}a^5x^2y$	$\frac{15}{2}a^5x^5y$	$-30a^5x^3y$

DIVISÃO DE POLINÔMIO POR MONÔMIO

Regra: Efetua-se a divisão de cada termo do polinômio pelo monômio divisor (propriedade distributiva).

Exemplo:

$$x^5 : x = x^4$$

$$(x^5 - x^3) : x = x^4 - x^2$$

$$x^3 : x = x^2$$

VAMOS EXERCITAR

1) $(x^3 - x^2) : x =$ $x^2 - x$

2) $(4x^2 - 8) : 2 =$ $2x^2 - 4$

3) $(8x^3 - 4x^2 - 6x) : 2x =$ $4x^2 - 2x - 3$

4) $(15a^4 - 10a^3 + 5a^2) : 5a =$ $3a^3 - 2a^2 + a$

5) $(8ax + 4bx - 6cx) : (+2x) =$ $4a + 2b - 3c$

6) $(8ax^3 - 4ax^2 - 16ax) : (-4ax) =$ $-2x^2 + x + 4$

7) $\left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right) : \left(\frac{1}{2}x^2\right) =$ $x^2 + \frac{4}{3}x$

8) $\left(\frac{3}{5}ab^3 - \frac{1}{10}ab^2\right) : \left(-\frac{1}{3}ab\right) =$ $-\frac{9}{5}b^2 + \frac{3}{10}b$

9) $(4x^2 + 8x^3) : 4x =$ $x + 2x^2$

10) $(x^4 + 2x^2y^2 + x^2y^3) : x^2 =$ $x^2 + 2y^2 + y^3$

11) $(15x^4y^2 - 5x^2y^2 + 10xy) : (-5xy) =$ $-3x^3y + xy - 2$

12) $(ab - ac) : a =$ $b - c$

DIVISÃO DE POLINÔMIO POR POLINÔMIO

Antes de aprender a determinar o quociente de um polinômio por outro polinômio, você precisa saber:
- como ordenar um polinômio;
- como determinar o grau de um polinômio.

Exemplo:

$2x^{4} - 3x^{3} + 5x^{2} - 8x^{1} + \underbrace{3x^{0}}_{3}$ Este polinômio está ordenado segundo as potências decrescentes de **x**.

$3x^{3} - 4x^{1} + \underbrace{7x^{0}}_{7}$ Este polinômio está ordenado segundo as potências decrescentes de **x**. Entretanto ele está incompleto, pois está faltando o termo que corresponde à segunda potência.
Você poderá completá-lo assim:

$$3x^3 + \boxed{0x^2} - 4x^1 + 7x^0 \quad \text{ou} \quad 3x^3 + \boxed{0x^2} - 4x + 7$$

Ordene segundo as potências decrescentes de x:

1) $5x^3 + 8x - 6x^2 + 2 + 2x^4 =$ $2x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 8x + 2$

2) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 5 =$ $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{2}x + 5$

3) $x^2 - x^3 + x^4 + x - 3 =$ $x^4 - x^3 + x^2 + x - 3$

4) $ax^4 - 2ax + 5ax^3 + 3ax^2 + 6 =$ $ax^4 + 5ax^3 + 3ax^2 - 2ax + 6$

Ordene os polinômios incompletos, segundo as potências decrescentes de x:

1) $2x + 5x^4 - 3x^3 =$ $5x^4 - 3x^3 + 2x$

2) $\frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3}x + 8x^3 =$ $\frac{1}{2}x^5 + 8x^3 + \frac{2}{3}x$

3) $4x - 3x^3 + 8x^2 =$ $-3x^3 + 8x^2 + 4x$

4) $5x + 7x^4 + 2 - 3x^2 =$ $7x^4 - 3x^2 + 5x + 2$

Ordene e complete os polinômios, segundo as potências decrescentes de x:

1) $3x^3 + 2x^4 + 5 =$ $2x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 0x + 5$

2) $2x - 9x^2 + x^4 - 3 =$ $x^4 + 0x^3 - 9x^2 + 2x - 3$

3) $5 + x^3 =$ $x^3 + 0x^2 + 0x + 5$

4) $7 + 2x^2 =$ $2x^2 + 0x + 7$

5) $3x - 4 + 10x^4 =$ $10x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 3x - 4$

COMO SE DETERMINA O GRAU DE UM POLINÔMIO?

Analisemos um polinômio e determinemos o grau de cada um de seus termos.

Veja: $\boxed{2xy^2} - \boxed{3x^3y} + \boxed{4xy} + \boxed{2xy^5}$

$2xy^2$ → 3.º grau; $3x^3y$ → 4.º grau; $4xy$ → 2.º grau; $2xy^5$ → 6.º grau

Pois bem, o maior dos graus correspondentes aos termos determina o grau do polinômio. Então, o polinômio analisado é do 6.º grau.

Entretanto, o grau de um polinômio pode ser dado também em relação a uma determinada letra, correspondendo ao maior grau referente à letra considerada.

Note:

	maior			
1.º grau (x)	3.º grau (x)	1.º grau (x)	1.º grau (x)	
2.º grau (y)	1.º grau (y)	1.º grau (y)	5.º grau (y)	maior
$2xy^2$	$- \; 3x^3y$	$+ \; 4xy$	$+ \; 2xy^5$	
3.º grau	4.º grau	2.º grau	6.º grau (maior)	

Polinômio do:
- 6.º grau
- 3.º grau em relação a **x**
- 5.º grau em relação a **y**

Determine os graus dos polinômios:

1) $x^3y + 2xy$
grau = ____________
grau em relação a **x** = ____________
grau em relação a **y** = ____________

2) $5a^3x - 6ax^3$
grau = ____________
grau em relação a **a** = ____________
grau em relação a **x** = ____________

3) $2x^5 + 3xy^3 + 6y^4$
grau = ____________
grau em relação a **x** = ____________
grau em relação a **y** = ____________

4) $2x^2 + 3xy + y^2$
grau = ____________
grau em relação a **x** = ____________
grau em relação a **y** = ____________

Vejamos agora a divisão de um polinômio por outro polinômio.

Vamos dividir $2x - x^2 + 5 + 2x^3$ por $x + 1$

Em primeiro lugar deve-se ordenar os polinômios segundo as potências decrescentes.

Dividendo: $2x - x^2 + 5 + 2x^3 \xrightarrow[\text{temos}]{\text{ordenando}} 2x^3 - x^2 + 2x + 5$

Divisor: $x + 1$

Agora você deve seguir os seguintes passos:

1.º passo

Divida o primeiro termo do dividendo $(2x^3)$ pelo primeiro termo do divisor (x), obtendo assim o primeiro termo do quociente.

$2x^3 : x = 2x^2$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 + 2x + 5 & x + 1 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

2.º passo

Multiplique o primeiro termo do quociente $(2x^2)$ pelo polinômio divisor $(x + 1)$.

$2x^2(x + 1) = 2x^3 + 2x^2$

Tome os simétricos dos termos desse produto e os adicione aos termos correspondentes do dividendo.

$2x^3 + 2x^2 \rightarrow \underbrace{-2x^3 - 2x^2}_{\text{simétricos}}$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3} - x^2 + 2x + 5 & x + 1 \\ \cline{2-2} -\cancel{2x^3} - 2x^2 & 2x^2 \\ \hline \quad \underbrace{-3x^2 + 2x + 5}_{\text{primeiro resto}} & \end{array}$$

3.º passo

Divida o primeiro termo do primeiro resto $(-3x^2)$ pelo primeiro termo do divisor (x), obtendo assim o segundo termo do quociente.

$-3x^2 : x = -3x$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3} - x^2 + 2x + 5 & x + 1 \\ \cline{2-2} -\cancel{2x^3} - 2x^2 & 2x^2 - 3x \\ \hline \quad -3x^2 + 2x + 5 & \end{array}$$

4.º passo

Multiplique o segundo termo do quociente $(-3x)$ pelo polinômio divisor $(x + 1)$.

$-3x\,(x + 1) = -3x^2 - 3x$

Tome os simétricos dos termos desse produto e os adicione aos termos correspondentes do dividendo.

$-3x^2 - 3x \rightarrow \underbrace{+3x^2 + 3x}_{\text{simétricos}}$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3} - x^2 + 2x + 5 & x + 1 \\ \cline{2-2} -\cancel{2x^3} - 2x^2 & 2x^2 - 3x \\ \hline \quad -\cancel{3x^2} + 2x + 5 & \\ \quad +\cancel{3x^2} + 3x & \\ \hline \quad \quad \underbrace{5x + 5}_{\text{segundo resto}} & \end{array}$$

5.º passo	6.º passo
Divida o primeiro termo do segundo resto (5x) pelo primeiro termo do divisor (x), obtendo assim o terceiro termo do quociente. $5x : x = 5$	Multiplique o terceiro termo do quociente (5) pelo polinômio divisor (x + 1). $5(x + 1) = 5x + 5$ Tome os simétricos dos termos desse produto e os adicione aos termos correspondentes do dividendo. $5x + 5 \rightarrow -5x - 5$ (simétricos)

5.º passo:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 + 2x + 5 & x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 3x + 5 \\ \hline \quad -3x^2 + 2x + 5 & \\ \quad +3x^2 + 3x & \\ \hline \qquad 5x + 5 & \end{array}$$

6.º passo:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 + 2x + 5 & x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 3x + 5 \\ \hline \quad -3x^2 + 2x + 5 & \\ \quad +3x^2 + 3x & \\ \hline \qquad 5x + 5 & \\ \qquad -5x - 5 & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

Estes passos devem ser seguidos até que o grau do resto seja menor que o grau do divisor.

No exemplo dado, temos:

Dividendo: $2x^3 - x^2 + 2x + 5$

Divisor: $x + 1$

Quociente: $2x^2 - 3x + 5$

Resto: 0

Como o resto é igual a zero, temos uma divisão exata.

VAMOS EXERCITAR

Efetue as divisões:

1) $2x^3 - x^2 - 3x \;|\; x + 1$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 - 3x & x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 3x \\ \hline \quad -3x^2 - 3x & \\ \quad +3x^2 + 3x & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

Quociente = $2x^2 - 3x$

Resto = 0

2) $x^3 - 6x^2 + 5x \;|\; x - 1$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 6x^2 + 5x & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^3 + x^2 & x^2 - 5x \\ \hline \quad -5x^2 + 5x & \\ \quad +5x^2 - 5x & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

Quociente = $x^2 - 5x$

Resto = 0

3) $x^3 + y^3 \;|\; x + y$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad + y^3 & x + y \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2y & x^2 - xy + y^2 \\ \hline \quad -x^2y & \\ \quad +x^2y + xy^2 & \\ \hline \qquad xy^2 + y^3 & \\ \qquad -xy^2 - y^3 & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

Quociente = $x^2 - xy + y^2$

Resto = 0

4) $3y^4 - 5y^3 + 11y - 11 \;|\; y^2 - 2$

$$\begin{array}{l|l} 3y^4 - 5y^3 \qquad + 11y - 11 & y^2 - 2 \\ \cline{2-2} -3y^4 \qquad + 6y^2 & 3y^2 - 5y + 6 \\ \hline \quad -5y^3 + 6y^2 + 11y - 11 & \\ \quad +5y^3 \qquad - 10y & \\ \hline \qquad 6y^2 + y - 11 & \\ \qquad -6y^2 \qquad + 12 & \\ \hline \qquad y + 1 & \end{array}$$

Quociente = $3y^2 - 5y + 6$

Resto = $y + 1$

5) $3a^3 - 17a^2 + 16a - 18 \;|\; 3a^2 - 2a + 4$

$$\begin{array}{l|l} 3a^3 - 17a^2 + 16a - 18 & 3a^2 - 2a + 4 \\ \cline{2-2} -3a^3 + 2a^2 - 4a & a - 5 \\ \hline \quad -15a^2 + 12a - 18 & \\ \quad +15a^2 - 10a + 20 & \\ \hline \qquad 2a + 2 & \end{array}$$

Quociente = $a - 5$

Resto = $2a + 2$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Aplique a propriedade distributiva e encontre o quociente:

1) $(21a^3b^4 - 35a^5b^3) : (-7a^3b^3) =$ $-3b + 5a^2$

2) $(18x^5y + 12x^4y^3) : 6x^4y =$ $3x + 2y^2$

3) $(3a^5x^2 + 4a^3x^2 - 2a^2x^2) : 5a^2x^2 =$ $\frac{3}{5}a^3 + \frac{4}{5}a - \frac{2}{5}$

4) $(2m^4n - 7m^3n^2 + 3m^2n) : 3m^2n =$ $\frac{2}{3}m^2 - \frac{7}{3}mn + 1$

b) Através do dispositivo prático, descubra o quociente e o resto das divisões:

1) $(3x^3 - 2x^2 + x + 6) : (x + 1)$
Quociente = $3x^2 - 5x + 6$
Resto = 0

2) $(4x^3 + 8x^2 - 3x + 5) : (2x + 5)$
Quociente = $2x^2 - x + 1$
Resto = 0

3) $(2m^3 - 5m^2 - 5m - 7) : (2m - 7)$
Quociente = $m^2 + m - 1$
Resto = 0

4) $(4x^2 + 12xy + 9y^2) : (2x + 3y)$
Quociente = $2x + 3y$
Resto = 0

5) $(12y^3 + 17y^2 - 22y + 48) : (4y^2 - 5y + 6)$
Quociente = $3y + 8$
Resto = 0

6) $(3y^4 - 11y^3 + y^2 - 11y + 15) : (y + 3)$
Quociente = $3y^3 + 2y^2 - 5y + 4$
Resto = 3

7) $(6x^3 - 19x^2 + 19x + 2) : (2x - 3)$
Quociente = $3x^2 - 5x + 2$
Resto = 8

8) $(2y^4 - 3y^3 + 3y^2 + 4y - 1) : (y^2 - 1)$
Quociente = $2y^2 - 3y + 5$
Resto = $y + 4$

9) $(2a^4 - 10a^3 + 9a^2 - 12a + 3) : (a^2 - 5a + 3)$
Quociente = $2a^2 + 3$
Resto = $3a - 6$

10) $(6x^3 + 19x^2 - 9x - 38) : (2x^2 + 3x - 8)$
Quociente = $3x + 5$
Resto = 2

POTENCIAÇÃO DE MONÔMIOS

Observe:

$$(2x^3)^2 = \underbrace{(2)^2}_{4} \cdot \underbrace{(x^3)^2}_{x^6}, \text{ então: } (2x^3)^2 = 4x^6$$

$$(-2a^2b^5)^3 = \underbrace{(-2)^3}_{-8} \cdot \underbrace{(a^2)^3}_{a^6} \cdot \underbrace{(b^5)^3}_{b^{15}}, \text{ então: } (-2a^2b^5)^3 = -8a^6b^{15}$$

Regra: Eleva-se o coeficiente à potência indicada e conservam-se as letras, dando-lhes como expoente o produto dos respectivos expoentes.

VAMOS EXERCITAR

Determine a potência:

1) $(3x^2)^3 =$ $27x^6$

2) $(2y^4)^2 =$ $4y^8$

3) $(5a^6)^2 =$ $25a^{12}$

4) $(3y^7)^3 =$ $27y^{21}$

5) $(-3a^5)^2 =$ $9a^{10}$

6) $(-a^7b^2)^2 =$ $a^{14}b^4$

7) $\left(-\frac{1}{2}x^4\right)^2 =$ $\frac{1}{4}x^8$

8) $\left(-\frac{2}{3}x^2y^3\right)^2 =$ $\frac{4}{9}x^4y^6$

9) $(-7a^3b)^2 =$ $49a^6b^2$

10) $(x^7y^5)^3 =$ $x^{21}y^{15}$

11) $(a^4b^6)^3 =$ $a^{12}b^{18}$

12) $\left(-\frac{1}{3}a^8x^4\right)^2 =$ $\frac{1}{9}a^{16}x^8$

13) $\left(\frac{2a^3b}{3}\right)^2 =$ $\frac{4a^6b^2}{9}$

14) $\left(\frac{2a^3b^6}{3x^3}\right)^2 =$ $\frac{4a^6b^{12}}{9x^6}$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Classifique as expressões conforme a quantidade de termos e encontre o valor numérico, para $x = 1$ e $y = -2$:

1) $x^3 + 2xy^2 + 2x^2y + y^3$ Polinômio e V.N. = −3.

2) $x^2 + 2x^2y^2 + y^2$ Trinômio e V.N. = 13.

3) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4}$ Binômio e V.N. = $\frac{4}{3}$.

4) $\frac{xy}{2}$ Monômio e V.N. = −1.

5) $\frac{x}{4} - \frac{xy}{2} + \frac{y}{6}$ Trinômio e V.N. = $\frac{11}{12}$.

6) $\frac{x^2y}{3} - \frac{xy^2}{2}$ Binômio e V.N. = $-\frac{8}{3}$.

7) $\frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{2}$ Binômio e V.N. = $\frac{13}{3}$.

8) $x^3 - x^2 + x + 5$ Polinômio e V.N. = 6.

b) Reduza os termos semelhantes, classifique a expressão obtida e calcule o seu valor numérico sabendo que $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 2$, $x = -1$ e $y = 2$:

1) $2ab + (-3ab + 4ab) =$ $3ab$ (monômio e V.N. = $\frac{3}{2}$)

2) $2ab^2 - (-6ab^2 + 5ab^2) =$ $3ab^2$ (monômio e V.N. = $\frac{3}{4}$)

3) $(9a - 4a) - (-5a + 4a) =$ $6a$ (monômio e V.N. = 6)

4) $-(-3ax^2 - 2ax^2) - (4ax^2 - 5ax^2) =$ $6ax^2$ (monômio e V.N. = 6)

5) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{7}{12}x =$ $\frac{1}{2}x$ (monômio e V.N. = $-\frac{1}{2}$)

6) $2a + 3b - (-3a) - (a - b - 2b) =$ $4a + 6b$ (binômio e V.N. = 7)

7) $-3ab + (+4bc + 7ab) - (-bc + 3ab) =$ $ab + 5bc$ (binômio e V.N. = $\frac{11}{2}$)

8) $(3x - 4x^2 + 5) - (-3x^2 + x - 2x - 7x^2) =$ $6x^2 + 4x + 5$ (trinômio e V.N. = 7)

9) $8xy - (-4ab + 7xy) + 5ab - 10ab =$ $xy - ab$ (binômio e V.N. = $-\frac{5}{2}$)

10) $(x^2 - 2xy + y^2) - (-2x^2 - 3xy + y^2) =$ $3x^2 + xy$ (binômio e V.N. = 1)

c) Efetue as operações (adição algébrica):

1) $(+9a^2) + (+5b^2) - (+7a^2) - (-b^2) =$ $2a^2 + 6b^2$

2) $\left(+\frac{1}{2}a\right) + (+3a) - \left(+\frac{1}{4}a\right) - \left(-\frac{1}{8}a\right) =$ $\frac{27}{8}a$

3) $\left(-\frac{1}{3}x^2\right) - \left(-\frac{1}{2}x^2\right) + \left(+\frac{1}{4}x^2\right) =$ $\frac{5}{12}x^2$

4) $(-8m) + (-9n) - (-5m) - (+11n) =$ $-3m - 20n$

5) $(5x + 3y + z) + (2x - 2y + 2z) =$ $7x + y + 3z$

6) $(3a^2b - 5ab^2 + 6b^2) - (-4a^2b - ab^2 + b^2) =$ $7a^2b - 4ab^2 + 5b^2$

7) $(4x^2 - 3xy + 3y^2) - (3x^2 - 2xy - y^2) =$ $x^2 - xy + 4y^2$

8) $(ax + bx - ab) + (-3ax + 4bx + 2ab) =$ $-2ax + 5bx + ab$

9) $(3x^2 + y^2) - (2x^2 - 3y^2) =$ $x^2 + 4y^2$

10) $(2x^2 + 3x - 5) - (+3x^2 - 2x + 7) =$ $-x^2 + 5x - 12$

11) $(+4x) + (-8x) + (+5x) + (-3x) =$ $-2x$

12) $(+2x^2) + (+7x^2) + (-4x) + (+8x) =$ $9x^2 + 4x$

13) $(+3ab) - (-3ab) =$ $6ab$

14) $(-3xy) + (+3xy) =$ 0

15) $(+4a^2b) + (+3a^2b) =$ $7a^2b$

16) $(+7bx) - (-3bx) =$ $10bx$

17) $(-x^2) - (+3x^2) =$ $-4x^2$

18) $(+ab) + (-bc) + (+2ab) + (+bc) =$ $3ab$

19) $(+3x^2) + (-2x) + (-2x^2) - (-3x) =$ $x^2 + x$

20) $(+3a) - (+2b) + (+3b) + (-2a) =$ $a + b$

d) Resolva:

1) Sabendo que $A = x^2 + 2xy - y^2$, $B = 2x^2 - 3xy$ e $C = x^2 - 3y^2$, determine:

- $A + B + C =$ $(4x^2 - xy - 4y^2)$
- $A + B - C =$ $(2x^2 - xy + 2y^2)$
- $A - B + C =$ $(5xy - 4y^2)$
- $A - B - C =$ $(-2x^2 + 5xy + 2y^2)$

2) Sabendo que $A = 2x^2 - 3xy^2$, $B = 7x^2 - 5x^2y$ e $C = 2xy^2 + 4x^2y$, determine:

- $A + B + C =$ $(9x^2 - xy^2 - x^2y)$
- $A - B + C =$ $(-5x^2 - xy^2 + 9x^2y)$
- $A + B - C =$ $(9x^2 - 5xy^2 - 9x^2y)$
- $A - B - C =$ $(-5x^2 - 5xy^2 + x^2y)$

3) Sabendo que $P_1 = 3a^2 - b^2 + c^2$, $P_2 = a^2 + b^2 - c^2$ e $P_3 = -a^2 + 3b^2 - c^2$, determine:

- $P_1 + P_2 + P_3 =$ $(3a^2 + 3b^2 - c^2)$
- $P_1 - P_2 + P_3 =$ $(a^2 + b^2 + c^2)$
- $P_1 + P_2 - P_3 =$ $(5a^2 - 3b^2 + c^2)$
- $P_1 - P_2 - P_3 =$ $(3a^2 - 5b^2 + 3c^2)$

4) Sendo $A = 4a^2b + 3ab^2$, $B = 2a^2b - 5ab^2$, $C = a^2b - ab^2$ e $D = -3ab^2$, determine:

- $A + B + C + D =$ $(7a^2b - 6ab^2)$
- $(A + B) - (C + D) =$ $(5a^2b + 2ab^2)$

e) Efetue as multiplicações:

1) $\left(-\frac{1}{2}a^3b\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}ab^3\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right) =$ $-\frac{1}{8}a^5b^4$

2) $5xy \cdot (2x^2 - 3y) =$ $10x^3y - 15xy^2$

3) $3a^2 \cdot (4a^2 - 5ab) =$ $12a^4 - 15a^3b$

4) $2abc \cdot (3a^2 - 4b^2 + 5c^2) =$ $6a^3bc - 8ab^3c + 10abc^3$

5) $(-2a) \cdot (5x^3 - 2ax^2 - 4a^3) =$ $-10ax^3 + 4a^2x^2 + 8a^4$

6) $a^2b^2 \cdot (a^2 + 2ab + b^2) =$ $a^4b^2 + 2a^3b^3 + a^2b^4$

7) $mn \cdot (mn + mx - nx) =$ $m^2n^2 + m^2nx - mn^2x$

8) $\frac{3}{4}ax \cdot \left(\frac{1}{2}a^2 + 2x^2 - \frac{1}{3}a^2x\right) =$ $\frac{3}{8}a^3x + \frac{3}{2}ax^3 - \frac{1}{4}a^3x^2$

9) $(m^2 + n) \cdot (m^2 + mn + n^2) =$ $m^4 + m^3n + m^2n^2 + m^2n + mn^2 + n^3$

10) $6a \cdot (-3ab) =$ $-18a^2b$

11) $(-4mn) \cdot (+2n) =$ $-8mn^2$

12) $(-2ab) \cdot (-3bc) =$ $6ab^2c$

13) $(3ax) \cdot (-2bx) \cdot (-4cx) =$ $24abcx^3$

14) $3a^2b \cdot (-4a^3b) =$ $-12a^5b^2$

15) $(-2x^3y^4) \cdot (-3x^2y^3m^2) =$ $6x^5y^7m^2$

16) $(-2ab) \cdot (-3a^2b^3c) \cdot (-4ab^2c) =$ $-24a^4b^6c^2$

17) $(abc) \cdot (-abc) \cdot (-abc) =$ $a^3b^3c^3$

18) $\left(-\frac{1}{8}a^2x^2y^4\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}axy^2\right) =$ $\frac{1}{16}a^3x^3y^6$

19) $(-3a^2) \cdot (-5a^7y) =$ $15a^9y$

20) $\left(-\frac{1}{2}m^2x^3\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}m^3x^4\right) =$ $\frac{1}{10}m^5x^7$

21) $\left(-\frac{3}{5}xy^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}x^2y^3m\right) =$ $\frac{1}{5}x^3y^5m$

22) $(a - 3) \cdot (4a + 1) =$ $4a^2 - 11a - 3$

23) $(a - 5) \cdot (a + 7) =$ $a^2 + 2a - 35$

24) $(m + 3) \cdot (m + 5) =$ $m^2 + 8m + 15$

25) $(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) =$ $a^3 - b^3$

26) $(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) =$ $a^3 + b^3$

f) Encontre o quociente:

1) $8a^7b^8x^4 : 2a^5b^3x^2 =$ $4a^2b^5x^2$

2) $(-6a^2mn) : (-3amn) =$ $2a$

3) $(3a^5b^2c^4) : (2a^2b^2c^3) =$ $\frac{3}{2}a^3c$

4) $(-7a^4b^8c^3) : (-3a^2b^6c) =$ $\frac{7}{3}a^2b^2c^2$

5) $\frac{3}{4}abc : \frac{4}{3}abc =$ $\frac{9}{16}$

6) $a^{\frac{5}{2}} : a^{\frac{3}{2}} =$ a

g) Obtenha o quociente e o resto:

1) $(x^3 - 5x^2 - x + 14) : (x - 2) =$ $x^2 - 3x + 7$ (resto = 0)

2) $(2x^3 - 5x^2 + 7x + 5) : (2x + 1) =$ $x^2 - 3x + 5$ (resto = 0)

3) $(6x^2 + 7 + 9x^3 - 32x) : (3x + 7) =$ $3x^2 - 5x + 1$ (resto = 0)

4) $(2y^3 + 9y^2 + y - 12) : (2y + 3) =$ $y^2 + 3y - 4$ (resto = 0)

5) $(6a^3 - 19a^2 + 23a - 9) : (2a - 3) =$ $3a^2 - 5a + 4$ (resto = +3)

6) $(6x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 30x - 5) : (3x^2 + 2x - 5) =$ $2x^2 - 4x + 2$ (resto = $6x + 5$)

7) $(10a^4 + 7a^3 - 26a^2 + 30a - 15) : (5a^2 - 4a + 3) =$ $2a^2 + 3a - 4$ (resto = $37a - 3$)

Unidade 3 — OS PRODUTOS NOTÁVEIS

NOÇÃO DE PRODUTOS NOTÁVEIS

No cálculo algébrico, certos produtos tornam-se muito evidentes porque são usados freqüentemente. Por isso mesmo são denominados **produtos notáveis**.

Para obter esses produtos, você poderá utilizar a propriedade distributiva. No entanto, eles podem ser obtidos de uma forma menos trabalhosa, se usarmos algumas regras especiais.

Nesta unidade você vai conhecer os seguintes produtos notáveis:

- quadrado de um binômio-soma; • quadrado de um binômio-diferença; • produto de um binômio-soma pelo seu binômio-diferença; • cubo de um binômio-soma; • cubo de um binômio-diferença.

QUADRADO DE UM BINÔMIO-SOMA: $(a + b)^2$

$(a + b)^2 = ?$

Observe: $(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

Então: $(\boxed{a} + \boxed{b})^2 = \boxed{a}^2 + 2\,\boxed{a}\,\boxed{b} + \boxed{b}^2$

1.º termo, 2.º termo, 1.º termo, 1.º termo, 2.º termo, 2.º termo

Regra:
- o quadrado do 1.º termo
  mais
- o duplo produto do 1.º pelo 2.º termo
  mais
- o quadrado do 2.º termo

VAMOS EXERCITAR

a) Observe as igualdades e complete:

1) $(c + m)^2 = c^2 + 2cm + m^2$

1.º termo: c.

2.º termo: m.

c^2 representa: o quadrado do 1.º termo.

2cm representa: o duplo produto do 1.º pelo 2.º termo.

m^2 representa: o quadrado do 2.º termo.

2) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

1.º termo: x.

2.º termo: y.

x^2 representa: o quadrado do 1.º termo.

2xy representa: o duplo produto do 1.º pelo 2.º termo.

y^2 representa: o quadrado do 2.º termo.

b) Determine os produtos, conforme o modelo:

$(2m + 3y)^2 = 4m^2 + 12my + 9y^2$	quadrado do 1.º termo: $(2m)^2 = 4m^2$
1.º termo: 2m	duplo produto do 1.º pelo 2.º termo: $2 \cdot (2m) \cdot (3y) = 12my$
2.º termo: 3y	quadrado do 2.º termo: $(3y)^2 = 9y^2$

1) $(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

1.º termo: 3x

2.º termo: 2y

quadrado do 1.º termo: $(3x)^2 = 9x^2$

duplo produto do 1.º pelo 2.º termo: $2 \cdot (3x) \cdot (2y) = 12xy$

quadrado do 2.º termo: $(2y)^2 = 4y^2$

2) $(5m + 2a)^2 = 25m^2 + 20ma + 4a^2$

1.º termo: 5m

2.º termo: 2a

quadrado do 1.º termo: $(5m)^2 = 25m^2$

duplo produto do 1.º pelo 2.º termo: $2 \cdot (5m) \cdot (2a) = 20ma$

quadrado do 2.º termo: $(2a)^2 = 4a^2$

c) Complete o bloco:

	$(2a^2 + b^5)^2$	$\left(5m^2 + \frac{1}{5}\right)^2 =$
1.º termo	$2a^2$	$5m^2$
2.º termo	b^5	$\frac{1}{5}$
Quadrado do 1.º termo	$(2a^2)^2 = 4a^4$	$(5m^2)^2 = 25m^4$
Duplo produto do 1.º pelo 2.º termo	$2 \cdot (2a)^2 \cdot (b^5) = 4a^2b^5$	$2 \cdot (5m^2) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = 2m^2$
Quadrado do 2.º termo	$(b^5)^2 = b^{10}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$
Conclusão	$(2a^2 + b^5)^2 = 4a^4 + 4a^2b^5 + b^{10}$	$\left(5m^2 + \frac{1}{5}\right)^2 = 25m^4 + 2m^2 + \frac{1}{25}$

d) Aplique a regra e encontre o produto:

1) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

2) $(y + 3)^2 = y^2 + 6y + 9$

3) $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

4) $(5x + y)^2 = 25x^2 + 10xy + y^2$

5) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

6) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

7) $(2a + m)^2 = 4a^2 + 4am + m^2$

8) $(3a + 4m)^2 = 9a^2 + 24am + 16m^2$

9) $(2a + 3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$

10) $(a^2 + b)^2 = a^4 + 2a^2b + b^2$

11) $(x^3 + y)^2 = x^6 + 2x^3y + y^2$

QUADRADO DE UM BINÔMIO-DIFERENÇA: $(a - b)^2$

$(a - b)^2 = ?$

Observe: $(a - b)^2 = (a - b)\,(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

Então: $(\boxed{a} - \boxed{b})^2 = \boxed{a}^2 - 2\,\boxed{a}\,\boxed{b} + \boxed{b}^2$

(1.º termo, 2.º termo; 1.º termo; 1.º termo, 2.º termo; 2.º termo)

Regra:
- o quadrado do 1.º termo
  menos *duas vezes o*
- o duplo produto do 1.º pelo 2.º termo
  mais
- o quadrado do 2.º termo

VAMOS EXERCITAR

a) Determine os produtos, conforme o modelo:

$(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$
1.º termo: $2x$
2.º termo: $3y$
quadrado do 1.º termo: $(2x)^2 = 4x^2$
duplo produto do 1.º pelo 2.º termo: $2 \cdot (2x) \cdot (3y) = 12xy$
quadrado do 2.º termo: $(3y)^2 = 9y^2$

1) $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$
1.º termo: x
2.º termo: 5
quadrado do 1.º termo: x^2
duplo produto do 1.º pelo 2.º termo: $2(x)(5) = 10x$
quadrado do 2.º termo: $5^2 = 25$

2) $(3m - 4n)^2 = 9m^2 - 24mn + 16n^2$
1.º termo: $3m$
2.º termo: $4n$
quadrado do 1.º termo: $(3m)^2 = 9m^2$
duplo produto do 1.º pelo 2.º termo: $2(3m)(4n) = 24mn$
quadrado do 2.º termo: $(4n)^2 = 16n^2$

b) Complete o bloco:

	$\left(y - \frac{1}{4}\right)^2$	$(2x^3 - y^3)^2$
1.º termo	y	$2x^3$
2. termo	$\frac{1}{4}$	y^3
Quadrado do 1.º termo	y^2	$(2x^3)^2 = 4x^6$
Duplo produto do 1.º pelo 2.º termo	$2 \cdot (y) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}y$	$2 \cdot (2x^3) \cdot (y^3) = 4x^3y^3$
Quadrado do 2.º termo	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$	$(y^3)^2 = y^6$
Conclusão	$\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}$	$(2x^3 - y^3)^2 = 4x^6 - 4x^3y^3 + y^6$

c) Aplique a regra e calcule o produto:

1) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

2) $(m - 3)^2 = m^2 - 6m + 9$

3) $(y - 7)^2 = y^2 - 14y + 49$

4) $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = a^2 - a + \frac{1}{4}$

5) $(2m - 4)^2 = 4m^2 - 16m + 16$

6) $(3y - 5)^2 = 9y^2 - 30y + 25$

7) $(2a - 8)^2 = 4a^2 - 32a + 64$

8) $(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

9) $(x^2 - y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

10) $(x^2 - 2)^2 \quad x^4 - 4x^2 + 4$

11) $(2y^3 - 4)^2 = 4y^6 - 16y^3 + 16$

12) $(2x^2 - 3y)^2 = 4x^4 - 12x^2y + 9y^2$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete:

1) $(a + m)^2 = a^2 + 2am + m^2$

a representa: o 1.º termo.

m representa: o 2.º termo.

a^2 representa: o quadrado do 1.º termo.

$2am$ representa: o duplo produto do 1.º pelo 2.º termo

m^2 representa: o quadrado do 2.º termo.

2) $(2\ell + p)^2 = 4\ell^2 + 4\ell p + p^2$

2ℓ representa: o 1.º termo.

p representa: o 2.º termo.

$4\ell^2$ representa: o quadrado do 1.º termo.

$4\ell p$ representa: o duplo produto do 1.º pelo 2.º termo.

p^2 representa: o quadrado do 2.º termo.

3) $(2x + 9)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(9) + (9)^2 = 4x^2 + 36x + 81$

4) $(3a - 7)^2 = (3a)^2 - 2(3a)(7) + (7)^2 = 9a^2 - 42a + 49$

5) $(h - 1)^2 = (h)^2 - 2(h)(1) + (1)^2 = h^2 - 2h + 1$

6) $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 = (2x)^2 - 2(2x)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 4x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{36}$

7) $\left(3a + \frac{1}{6}\right)^2 = (3a)^2 + 2(3a)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 9a^2 + a + \frac{1}{36}$

8) $(y + m)^2 = y^2 + 2ym + m^2$

9) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

10) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

11) $(y + 10)^2 = y^2 + 20y + 100$

12) $(m - 6)^2 = m^2 - 12m + 36$

13) $(2x + 10)^2 = 4x^2 + 40x + 100$

b) Encontre o produto, aplicando a regra:

1) $(x + 3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

2) $(x - 3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$

3) $(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$

4) $(3x - 4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$

5) $(x^2 + 2y)^2 = x^4 + 4x^2y + 4y^2$

6) $(x^2 - 2y)^2 = x^4 - 4x^2y + 4y^2$

7) $(2x^3 + 5y^2)^2 = 4x^6 + 20x^3y^2 + 25y^4$

8) $(2x^3 - 5y^2)^2 = 4x^6 - 20x^3y^2 + 25y^4$

DESENVOLVA SUA CRIATIVIDADE

a) Descubra o 1.° e o 2.° termos e complete as sentenças:

1) $(2m + 4)^2 = 4m^2 + 16m + 16$

2) $(x - 5y)^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$

3) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4}$

4) $\left(\frac{2x}{3} - 1\right)^2 = \frac{4x^2}{9} - \frac{4x}{3} + 1$

b) Encontre a potência, aplicando as regras estudadas:

1) $5^2 = (3+2)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2 = 9 + 12 + 4 = 25$

2) $7^2 =$ ______

3) $10^2 =$ ______

4) $21^2 =$ ______

c) Determine o quadrado dos números, decompondo-os em suas dezenas e unidades:

1) $25^2 = (20+5)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 5 + 5^2 = 400 + 200 + 25 = 625$

2) $13^2 =$ ______

3) $36^2 =$ ______

4) $58^2 =$ ______

PRODUTO DE UM BINÔMIO-SOMA PELO SEU BINÔMIO-DIFERENÇA: (a + b)(a — b)

$(a + b)(a - b) = ?$

Observe: $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

Então:

Regra:
- o quadrado do 1.º termo
  menos
- o quadrado do 2.º termo

VAMOS EXERCITAR

a) Determine o produto, conforme o modelo:

$(2x + 5)(2x - 5) = 4x^2 - 25$
1.° termo: 2x
2.° termo: 5
quadrado do 1.° termo: $(2x)^2 = 4x^2$
quadrado do 2.° termo: $(5)^2 = 25$

1) $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$
   1.° termo: x
   2.° termo: 1
   quadrado do 1.° termo: x^2
   quadrado do 2.° termo: 1

2) $(3y + 2)(3y - 2) = 9y^2 - 4$
   1.° termo: $3y$
   2.° termo: 2
   quadrado do 1.° termo: $(3y)^2 = 9y^2$
   quadrado do 2.° termo: $(2)^2 = 4$

b) Complete o bloco:

	$(2x^2 + 3)(2x^2 - 3)$	$(x^3 + 5y)(x^3 - 5y)$	$\left(4x + \frac{2}{5}\right)\left(4x - \frac{2}{5}\right)$
1.° termo	$2x^2$	x^3	$4x$
2.° termo	3	$5y$	$\frac{2}{5}$
Quadrado do 1.° termo	$(2x^2)^2 = 4x^4$	$(x^3)^2 = x^6$	$(4x)^2 = 16x^2$
Quadrado do 2.° termo	$(3)^2 = 9$	$(5y)^2 = 25y^2$	$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$
Conclusão	$(2x^2+3)(2x^2-3) = 4x^4 - 9$	$(x^3+5y)(x^3-5y) = x^6 - 25y^2$	$\left(4x+\frac{2}{5}\right)\left(4x-\frac{2}{5}\right) = 16x^2 - \frac{4}{25}$

c) Encontre o produto, aplicando a regra:

1) $\left(y+\frac{3}{4}\right)\left(y-\frac{3}{4}\right) = y^2 - \frac{9}{16}$

2) $\left(a+\frac{2}{3}\right)\left(a-\frac{2}{3}\right) = a^2 - \frac{4}{9}$

3) $(2x+3)\ 2x-3) = 4x^2 - 9$

4) $(x^2+2)(x^2-2) = x^4 - 4$

5) $(8+2x)(8-2x) = 64 - 4x^2$

6) $(3x^3+10)(3x^3-10) = 9x^6 - 100$

7) $(2a+5b)(2a-5b) = 4a^2 - 25b^2$

8) $(x+4y)(x-4y) = x^2 - 16y^2$

9) $\left(2x+\frac{y}{3}\right)\left(2x-\frac{y}{3}\right) = 4x^2 - \frac{y^2}{9}$

10) $(x^3+5y^2)(x^3-5y^2) = x^6 - 25y^4$

DESENVOLVA SUA CRIATIVIDADE

Sem efetuar a multiplicação, descubra o resultado através do produto notável:

1) $21 \times 19 = (20+1)(20-1) = 400 - 1 = 399$

2) $11 \times 9 =$ ______

3) $9 \times 5 =$ ______

4) $10 \times 6 =$ ______

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete adequadamente:

1) $(x + \underline{9})^2 = \underline{x^2} + 18x + \underline{81}$

2) $(y - \underline{12})^2 = \underline{y^2} - 24y + \underline{144}$

3) $(\underline{3x} + \underline{7})^2 = 9x^2 + \underline{42x} + 49$

4) $(\underline{2m} - \underline{9})^2 = 4m^2 - \underline{36m} + 81$

5) $(3x + \underline{5})(\underline{3x} - 5) = 9x^2 - 25$

6) $(5m+8)(\underline{5m} - \underline{8}) = 25m^2 - 64$

b) Aplique a regra e encontre o produto:

1) $\left(m+\frac{b}{6}\right)^2 = m^2 + \frac{mb}{3} + \frac{b^2}{36}$

2) $\left(\frac{x}{2}-3\right)^2 = \frac{x^2}{4} - 3x + 9$

3) $\left(\frac{x}{2}+3\right)\left(\frac{x}{2}-3\right) = \frac{x^2}{4} - 9$

4) $\left(3x+\frac{y}{3}\right)\left(3x-\frac{y}{3}\right) = 9x^2 - \frac{y^2}{9}$

5) $\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{7}\right)\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{7}\right) = \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49}$

6) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

CUBO DE UM BINÔMIO-SOMA: $(a+b)^3$

$(a-b)^3 = ?$

Observe:

$(a+b)^3 = (a+b)\ (a+b)^2$

$= (a+b)\ (a^2+2ab+b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 2a^2b + a^2b + ab^2 + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Regra:

- o cubo do 1.º termo

  mais

- o triplo produto do quadrado do 1.º termo pelo 2.º termo

  mais

- o triplo produto do 1.º termo pelo quadrado do 2.º termo

  mais

- o cubo do 2.º termo

Então:

$(\boxed{a} + \boxed{b})^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

1.º termo 2.º termo

a) Complete adequadamente:

1) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

x^3 representa: o cubo do 1º termo.

$3x^2y$ representa: o triplo produto do quadrado do 1º termo pelo 2º termo.

$3xy^2$ representa: o triplo produto do 1º termo pelo quadrado do 2º termo.

y^3 representa: o cubo do 2º termo.

2) $(2m + y)^3 = 8m^3 + 12m^2y + 6my^2 + y^3$

cubo do 1.º termo: $(2m)^3 = 8m^3$

triplo produto do quadrado do 1.º termo pelo 2.º termo: $3 \cdot (2m)^2 \cdot y = 12m^2y$

triplo produto do 1.º termo pelo quadrado do 2.º termo: $3 \cdot (2m) \cdot (y)^2 = 6my^2$

cubo do 2.º termo: $(y)^3 = y^3$

b) Complete o bloco:

Expressão	Cubo do 1.º termo	Triplo produto do quadrado do 1.º termo pelo 2.º termo	Triplo produto do 1.º termo pelo quadrado do 2.º termo	Cubo do 2.º termo	Resultado
$(3x + 5)^3$	$(3x)^3 = 27x^3$	$3(3x)^2(5) = 135x^2$	$3(3x)(5)^2 = 225x$	$(5)^3 = 125$	$27x^3 + 135x^2 + 225x + 125$
$(2y + 1)^3$	$(2y)^3 = 8y^3$	$3(2y)^2(1) = 12y^2$	$3(2y)(1)^2 = 6y$	$(1)^3 = 1$	$8y^3 + 12y^2 + 6y + 1$
$(y + 3)^3$	$(y)^3 = y^3$	$3(y)^2(3) = 9y^2$	$3(y)(3)^2 = 27y$	$(3)^3 = 27$	$y^3 + 9y^2 + 27y + 27$
$(2m + 3n)^3$	$(2m)^3 = 8m^3$	$3(2m)^2(3m) = 36m^2m$	$3(2m)(3m)^2 = 54mm^2$	$(3m)^3 = 27n^3$	$8m^3 + 36m^2n + 54mn^2 + 27n^3$
$(x + 4)^3$	$(x)^3 = x^3$	$3(x)^2(4) = 12x^2$	$3(x)(4)^2 = 48x$	$(4)^3 = 64$	$x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
$(x^2 + y)^3$	$(x^2)^3 = x^6$	$3(x^2)^2(y) = 3x^4y$	$3(x^2)(y)^2 = 3x^2y^2$	$(y)^3 = y^3$	$x^6 + 3x^4y + 3x^2y^2 + y^3$

c) Efetue, aplicando a regra:

1) $(a + 5)^3 = a^3 + 15a^2 + 75a + 125$

2) $(m + 1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$

3) $(y + 2)^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$

4) $(2a + 6)^3 = 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$

5) $(x^2 + 2)^3 = x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$

6) $(m^2 + 3)^3 = m^6 + 9m^4 + 27m^2 + 27$

7) $(2x^2 + y^2)^3 = 8x^6 + 12x^4y^2 + 6x^2y^4 + y^6$

8) $(x^3 + 2)^3 = x^9 + 6x^6 + 12x^3 + 8$

CUBO DE UM BINÔMIO-DIFERENÇA: $(a - b)^3$

$(a - b)^3 = ?$

Observe:

$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2$

$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - 2a^2b - a^2b + ab^2 + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Então:

$(\boxed{a} - \boxed{b})^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

1.º termo 2.º termo

Regra:

- o cubo do 1.º termo

menos

- o triplo produto do quadrado do 1.º termo pelo 2.º termo

mais

- o triplo produto do 1.º termo pelo quadrado do 2.º termo

menos

- o cubo do 2.º termo

VAMOS EXERCITAR

a) Complete adequadamente:

1) $(m - n)^3 = m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$

m^3 representa: o cubo do 1º termo.

$3m^2n$ representa: o triplo produto do quadrado do 1º termo pelo 2º termo.

$3mn^2$ representa: o triplo produto do 1º termo pelo quadrado do 2º termo.

n^3 representa: o cubo do 2º termo.

2) $(2m - 3)^3 = (2m)^3 - 3 \cdot (2m)^2 \cdot 3 + 3 \cdot (2m) \cdot 3^2 - (3)^3$

$(2m)^3 = 8m^3$ representa: o cubo do 1º termo.

$3 \cdot (2m)^2 \cdot 3 = 36m^2$ representa: o triplo produto do quadrado do 1º termo pelo 2º termo.

$3 \cdot (2m) \cdot 3^2 = 54m$ representa: o triplo produto do 1º termo pelo quadrado do 2º termo.

$(3)^3 = 27$ representa: o cubo do 2º termo.

b) Complete o bloco:

Expressão	Cubo do 1.º termo	Triplo produto do quadrado do 1.º termo pelo 2.º termo	Triplo produto do 1.º termo pelo quadrado do 2.º termo	Cubo do 2.º termo	Resultado
$(3x - 2)^3$	$(3x)^3 = 27x^3$	$3(3x)^2(2) = 54x^2$	$3(3x)(2)^2 = 36x$	$(2)^3 = 8$	$27x^3\ 54x^2 + 36x - 8$
$(2y - 5)^3$	$(2y)^3 = 8y^3$	$3(2y)^2(5) = 60y^2$	$3(2y)(5)^2 = 150y$	$(5)^3 = 125$	$8y^3 - 60y^2 + 150y - 125$
$(x - 6)^3$	$(x)^3 = x^3$	$3(x)^2(6) = 18x^2$	$3(x)(6)^2 = 108x$	$(6)^3 = 216$	$x^3 - 18x^2 + 108x - 216$
$(2x - 3y)^3$	$(2x)^3 = 8x^3$	$3(2x)^2(3y) = 36x^2y$	$3(2x)(3y)^2 = 54xy^2$	$(3y)^3 = 27y^3$	$8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
$(x - 3)^3$	$(x)^3 = x^3$	$3(x)^2(3) = 9x^2$	$3(x)(3)^2 = 27x$	$(3)^3 = 27$	$x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
$(x^2 - 1)^3$	$(x^2)^3 = x^6$	$3(x^2)^2(1) = 3x^4$	$3(x^2)(1)^2 = 3x^2$	$(1)^3 = 1$	$x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$
$(2x^2 - 3)^3$	$(2x^2)^3 = 8x^6$	$3(2x^2)^2(3) = 36x^4$	$3(2x^2)(3)^2 = 54x^2$	$(3)^3 = 27$	$8x^6 - 36x^4 + 54x^2 - 27$

c) Efetue, aplicando a regra:

1) $(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

2) $(2x - 4)^3 = 8x^3 - 48x^2 + 96x - 64$

3) $(4x - 5)^3 = 64x^3 - 240x^2 + 300x - 125$

4) $\left(m - \frac{1}{2}\right)^3 = m^3 - \frac{3}{2}m^2 + \frac{3}{4}m - \frac{1}{8}$

5) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27}$

6) $(x^2 - 3)^3 = x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 27$

7) $(2x^2 - y)^3 = 8x^6 - 12x^4y + 6x^2y^2 - y^3$

8) $(x^2 - y^2)^3 = x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$

9) $\left(3x^2 - \frac{1}{3}\right)^3 = 27x^6 - 9x^4 + x^2 - \frac{1}{27}$

10) $(2a - 1)^3 = 8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Descubra o resultado, aplicando a regra:

1) $\left(a + \frac{b}{2}\right)^3 = a^3 + \frac{3}{2}a^2b + \frac{3}{4}ab^2 + \frac{b^3}{8}$

2) $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^3 = \frac{x^3}{8} - \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{2}x - 27$

3) $\left(3y - \frac{1}{2}\right)^3 = 27y^3 - \frac{9}{2}y^2 + \frac{9}{4}y - \frac{1}{8}$

4) $\left(4y + \frac{1}{2}\right)^3 = 64y^3 + 24y^2 + 3y + \frac{1}{8}$

5) $\left(2x + \frac{y}{2}\right)^3 = 8x^3 + 6x^2y + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{y^3}{8}$

6) $(x^2 - 2)^3 = x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$

a) Dê o resultado das expressões, aplicando produto notável:

1) $(a + b)^2 - (a - b)^2 =$ $4ab$

2) $5(x - y)^2 + 2(x + y)^2 =$ $7x^2 - 6xy + 7y^2$

3) $2(x - 3)^2 - 3(x - 2)(x + 2) + 4(x + 1)^2 =$ $3x^2 - 4x + 34$

4) $(a - 2)(a + 2) - (a + 3)^2 =$ $-6a - 13$

5) $(a + 1)^3 - (a - 2)^3 =$ $9a^2 - 9a + 9$

6) $(x - 2)^2 + (x + 2)^2 =$ $2x^2 + 8$

7) $(x - 4)^3 - (x + 4)^3 =$ $-24x^2 - 128$

8) $(2x + 1)(2x - 1) - (2x - 1)^2 + (2x + 1)^2 =$ $4x^2 + 8x - 1$

9) $(x - 5)^2 + (x + 5)^2 =$ $2x^2 + 50$

10) $(y - 3)^3 + (y + 3)^3 =$ $2y^3 + 54y$

b) Assinale a alternativa correta:

1) O termo que se deve adicionar a $x^4 + y^2$, para se obter o quadrado de $x^2 + y$ é:

a. ( ) $2xy^2$ b. ( ) $2xy$ c. ( ) x^2y d. (X) $2x^2y$

2) Que termo você adicionará a $2x^2$, para que o quadrado da expressão obtida seja $4x^4 + 9y^6 - 12x^2y^3$?

a. (X) $-3y^3$ b. ( ) $9y^3$ c. ( ) $3y^3$ d. ( ) $3y^6$

3) A expressão $(7x^3 - 8y)^2$ equivale a:

a. ( ) $49x^6 - 64y^2$

b. ( ) $49x^9 - 64y^2$

c. (X) $49x^6 - 112x^3y + 64y^2$

d. ( ) $14x^9 - 16y^2$

4) A igualdade ($2m^3$ $+ 2n^2)^2 = 4m^6 +$ $8m^3n^2$ $+$ $4n^4$ se completa, respectivamente, com os termos:

a. ( ) $2m^3$; $4n^4$; $8m^3n^2$

b. ( ) $4m^3$; $8m^6n^4$; $2n^2$

c. ( ) $2m^3$; $4m^6n^4$; $2n^4$

d. (X) $2m^3$; $8m^3n^2$; $4n^4$

5) A expressão $2(x + y)^2 - 3(x - y)^2 - 5(x + y)(x - y)$ equivale a:

a. (X) $-6x^2 + 10xy + 4y^2$

b. ( ) $6x^2 - 10xy + 4y^2$

c. ( ) 1

d. ( ) zero

6) Associe as expressões equivalentes das colunas I e II:

Coluna I

(a) $(2x + 3y)^2$

(b) $(2x - 3y)^2$

(c) $(3x + 2y)^2$

(d) $(3x - 2y)^2$

Coluna II

(a) $9y^2 + 4x^2 + 12xy$

(d) $9x^2 + 4y^2 - 12xy$

(b) $9y^2 + 4x^2 - 12xy$

(c) $9x^2 + 4y^2 + 12xy$

Você obteve a seguinte ordem:

a. ( ) a, d, c, b

b. ( ) d, a, b, c

c. (X) a, d, b, c

d. ( ) b, c, a, d

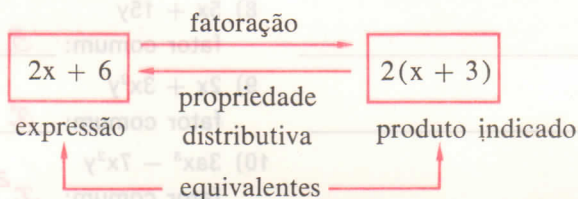
A FATORAÇÃO ALGÉBRICA

NOÇÃO DE FATORAÇÃO

Observe:

$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$	Note que $2 \cdot 3 \cdot 5$ é um produto indicado equivalente a 30. Neste produto indicado, os fatores são: 2, 3 e 5.
$2(x + 3) = 2x + 6$	Note que $2(x + 3)$ é um produto indicado equivalente a $2x + 6$. Neste produto indicado, os fatores são: 2 e $(x + 3)$

Pois bem, denomina-se fatoração a operação que permite transformar uma expressão num produto indicado equivalente a esta expressão.

Então:

Para obter o produto indicado equivalente a uma expressão, devemos conhecer alguns processos conhecidos por **casos de fatoração.**

Estudaremos os casos mais simples e freqüentes de fatoração:

• 1.º caso: expressões algébricas com fator comum; • 2.º caso: associação em grupos; • 3.º caso: trinômio quadrado perfeito; • 4.º caso: diferença de dois quadrados.

1.º CASO: EXPRESSÕES ALGÉBRICAS COM FATOR COMUM

Considere a expressão: $am + bm - cm$.

Note que em todos os termos dessa expressão existe o fator **m.**

Então, para conseguir um produto indicado equivalente, devemos seguir estes passos:

1.º passo	**2.º passo**
Escreve-se o fator comum: $am + bm - cm \rightarrow m$	Abre-se parêntese e escrevem-se os quocientes da divisão de cada termo da expressão pelo fator comum, fechando-se o parêntese após o último quociente: $am + bm - cm = m(a + b - c)$ $\frac{am}{m} = a$ $\frac{bm}{m} = b$ $\frac{cm}{m} = c$

O fator comum pode ser numérico, literal ou numérico e literal.

COMO DESCOBRIR O FATOR COMUM?

- Acha-se o m.d.c. dos coeficientes de todos os termos da expressão, obtendo-se, assim, o fator comum numérico.
- Escrevem-se as letras que constam de todos os termos da expressão, com os seus menores expoentes. Obtém-se, assim, o fator comum literal.

Exemplos:

1) $4a + 6b - 8c$
Coeficientes dos termos: 4, 6 e 8.
m.d.c. dos coeficientes: m.d.c. (4, 6, 8) = 2
Fator comum numérico: 2.
Letras que constam de todos os termos: não há.
Fator comum literal: não há.
Conclusão: fator comum = 2.

2) $2x^2y + 8x^3y^2 - 4x^2y^3$
Coeficientes dos termos: 2, 8 e 4.
m.d.c. dos coeficientes: m.d.c. (2, 8, 4) = 2.
Fator comum numérico: 2.
Letras que constam de todos os termos: **x** e **y**.
Fator comum literal: x^2y.
Conclusão: fator comum = $2x^2y$.

Descubra o fator comum, nas expressões:

1) $2x + 6x^2$
fator comum: $2x$

2) $3x^2 - 5x^3$
fator comum: x^2

3) $6a^2x - 8ax^2 + 4ax$
fator comum: $2ax$

4) $2x^3 - 4x^2 + 2x$
fator comum: $2x$

5) $6a^4b^2 + 12a^2b^3 - 18a^2b^2$
fator comum: $6a^2b^2$

6) $5ax - 10a^2x$
fator comum: $5ax$

7) $3m^2 - 9m^4 + 6m^3$
fator comum: $3m^2$

8) $5x + 15y$
fator comum: 5

9) $2x + 3x^2y$
fator comum: x

10) $3ax^3 - 7x^2y$
fator comum: x^2

Vejamos agora dois exemplos de fatoração através de fator comum.

Expressão	1.º passo	2.º passo
$4a - 6x + 8y$ fator comum: 2	$4a - 6x + 8y = 2$	$4a - 6x + 8y = 2(2a - 3x + 4y)$ $\frac{4a}{2} = 2a$ $\frac{6x}{2} = 3x$ $\frac{8y}{2} = 4y$
$3x^2y - 6xy^2$ fator comum: $3xy$	$3x^2y - 6xy^2 = 3xy$	$3x^2y - 6xy^2 = 3xy\ (x - 2y)$ $\frac{3x^2y}{3xy} = x$ $\frac{6xy^2}{3xy} = 2y$

Este caso de fatoração, através de fator comum, costuma ser chamado de **fatoração por evidência**.

VAMOS EXERCITAR

Fatore, por evidência (fator comum), as expressões:

1) $3x - 6y = 3(x - 2y)$

2) $5a + 10b = 5(a + 2b)$

3) $4a + 8b - 20c = 4(a + 2b - 5c)$

4) $2x - 3x^2 = x(2 - 3x)$

5) $6y^2 + 7y^3 = y^2(6 + 7y)$

6) $3x^3 - 2x^2 = x^2(3x - 2)$

7) $2x^2 - 6x = 2x(x - 3)$

8) $3y^3 + 6y^2 = 3y^2(y + 2)$

9) $5a^2b - 15ab^2 = 5ab(a - 3b)$

10) $12x^3y^2 + 8x^2y^3 = 4x^2y^2(3x + 2y)$

11) $a^2x + a^2m = a^2(x + m)$

12) $10x + 20y - 10 = 10(x + 2y - 1)$

13) $mt - nt + ct = t(m - n - c)$

14) $ay - by - cy = y(a - b - c)$

15) $21 + 42a - 84ab = 21(1 + 2a - 4ab)$

16) $3a^2b^3 + 6ab^5 - 9a^2b^2 = 3ab^2(ab + 2b^3 - 3a)$

2.º CASO: ASSOCIAÇÃO EM GRUPOS

Observe o quadro:

Expressão	**1.º passo**: agrupar convenientemente os termos.	**2.º passo**: fatorar, por evidência, cada grupo.	**3.º passo**: fatorar, pondo em evidência o fator comum que surgiu.
$3x^3 - 2x + 6ax^2 - 4a$	$(3x^3 - 2x) + (6ax^2 - 4a)$ fator comum: x — fator comum: 2a	$(3x^3 - 2x) + (6ax^2 - 4a)$ $x(3x^2 - 2) + 2a(3x^2 - 2)$	$(3x^3 - 2x) + (6ax^2 - 4a)$ $x(3x^2 - 2) + 2a(3x^2 - 2)$ $(3x^2 - 2)(x + 2a)$

Este caso de fatoração, através da associação dos termos em grupos, costuma ser chamado de **fatoração por agrupamento**

Fatore, por agrupamento, as expressões:

1) $x^3 + x^2 + 2x + 2 = (x + 1)(x^2 + 2)$

2) $x^2 + 5x + ax + 5a = (x + 5)(x + a)$

3) $6a^2 + 2ab + 3ac + bc = (3a + b)(2a + c)$

4) $2am - an + 6bm - 3bn = (2m - n)(a + 3b)$

5) $2ax + bx + 2ay + by = (2a + b)(x + y)$

6) $ay + 2by + ax + 2bx = (a + 2b)(y + x)$

7) $3ax - 3a + bx - b = (x - 1)(3a + b)$

8) $5ac - 10ab + 2c - 4b = (c - 2b)(5a + 2)$

9) $a^2 + ax + ab + bx = (a + x)(a + b)$

10) $ac - 2bc + ad - 2bd = (a - 2b)(c + d)$

11) $2ax - 3bx + 6ay - 9by = (2a - 3b)(x + 3y)$

12) $m^3y^4 - b^5m^3 + a^2y^4 - a^2b^5 = (y^4 - b^5)(m^3 + a^2)$

UM CUIDADO ESPECIAL: OS SINAIS

Considere a expressão: $ax + ay - bx - by$

Agora vamos agrupar os termos:

$ax + ay - bx - by = (ax + ay) - (bx + by)$

Note que com o sinal negativo antes dos parênteses, os termos **bx** e **by** tiveram seus sinais trocados:

$-bx - by = -(+bx + by)$

Fatorando cada grupo por evidência, temos:

$ax + ay - bx - by = (ax + ay) - (bx + by)$

$a(x + y) - b(x + y)$

$(x + y)(a - b)$

Fatore, por agrupamento, as expressões:

1) $x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x + 1)(x^2 - 2)$

2) $ax + bx - ay - by = (a + b)(x - y)$

3) $x^2 + 2x - xy - 2y = (x + 2)(x - y)$

4) $a^2 + ab - ac - bc = (a + b)(a - c)$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Fatore as seguintes expressões, utilizando-se do 1.º ou 2.º caso:

1) $8b^2 - 12b^4 = 4b^2(2 - 3b^2)$

2) $2a^4 - 3a^5 + 5a^3 = a^3(2a - 3a^2 + 5)$

3) $8x^4 - 16x^2 + 64x^3 = 8x^2(x^2 - 2 + 8x)$

4) $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$

5) $10m^2n^2 - 8m^4nx - 6mny = 2mn(5mn - 4m^3x - 3y)$

6) $6ac + 2ad + 3bc + bd = (3c + d)(2a + b)$

DESENVOLVA SUA CRIATIVIDADE

Encontre duas maneiras para fatorar, por agrupamento, a expressão:

$3x^2 + 9ax - xy - 3ay = (3x^2 + 9ax) - (xy + 3ay)$

$3x(x + 3a) - y(x + 3a) = (x + 3a)(3x - y)$

ou $3x^2 + 9ax - xy - 3ay = (3x^2 - xy) + (9ax - 3ay)$

$x(3x - y) + 3a(3x - y) = (3x - y)(x + 3a)$

3.º CASO: TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO

Antes de estudar este caso de fatoração, você precisa saber quando um termo algébrico é quadrado perfeito.

Observe:

$\sqrt{4x^2} = 2x$, pois $(2x)^2 = 4x^2$

$\sqrt{9a^4b^2} = 3a^2b$, pois $(3a^2b)^2 = 9a^4b^2$

$\sqrt{3ax} = ?$

Pois bem, os termos que possuem raiz quadrada exata são quadrados perfeitos. Então, $4x^2$ e $9a^4b^2$ são quadrados perfeitos.

Verifique se os termos são ou não quadrados perfeitos:

1) $\sqrt{9a^2} = 3a$, pois $(3a)^2 = 9a^2$

Logo: $9a^2$ é quadrado perfeito.

2) $\sqrt{25y^6} =$ $5y^3$, pois $(5y^3)^2 = 25y^6$

Logo: $25y^6$ é quadrado perfeito.

3) $\sqrt{4x} =$?, pois $(?)^2 = 4x$

Logo: $4x$ não é quadrado perfeito.

4) $\sqrt{a^2} =$ a, pois $(a)^2 = a^2$

Logo: a^2 é quadrado perfeito.

NOÇÃO DE TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO

Um trinômio é quadrado perfeito quando resulta do desenvolvimento do quadrado de um binômio-soma ou de um binômio-diferença.

Veja:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, pois $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{(a + b)^2} = a + b$

$(a + b)^2$: quadrado de um binômio-soma; $a^2 + 2ab + b^2$: trinômio quadrado perfeito

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, pois $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x - y)^2} = x - y$

$(x - y)^2$: quadrado de um binômio-diferença; $x^2 - 2xy + y^2$: trinômio quadrado perfeito

Indique o trinômio quadrado perfeito resultante do quadrado dos seguintes binômios:

1) $(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$

2) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

3) $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

4) $(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

5) $(x^2 - y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

6) $(a^2 - 3)^2 = a^4 - 6a^2 + 9$

7) $(3a + 2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$

8) $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

9) $(4a^2 - b^3)^2 = 16a^4 - 8a^2b^3 + b^6$

10) $(2m^3 + 3n)^2 = 4m^6 + 12m^3n + 9m^2$

COMO RECONHECER UM TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO?

Um trinômio é quadrado perfeito quando:

> dois de seus três termos são quadrados perfeitos e o duplo produto das raízes dos termos quadrados perfeitos é igual ao termo não quadrado perfeito.

Observe:

1) $9x^2 + 12xy + 4y^2$

$\sqrt{9x^2} = 3x$ $\quad \sqrt{4y^2} = 2y$

$2 \cdot 3x \cdot 2y = 12xy$

Logo: $9x^2 + 12xy + 4y^2$ é um trinômio quadrado perfeito.

2) $x^2 - 2xy - y^2$

$\sqrt{x^2} = x$ $\quad \sqrt{-y^2} = ?$

Logo: $x^2 - 2xy - y^2$ não é um trinômio quadrado perfeito.

Identifique os trinômios, escrevendo, ao lado de cada um, se é ou não quadrado perfeito:

1) $4a^2 + 12ab + 9b^2$ É quadrado perfeito.

2) $x^2 + 16y^2 - 8xy$ É quadrado perfeito.

3) $x^2 + 9y^2 - 3xy$ Não é quadrado perfeito.

4) $16x^2 - 4y^2 - 16xy$ Não é quadrado perfeito.

5) $m^2 + m + \frac{1}{4}$ É quadrado perfeito.

6) $\frac{y^2}{4} - y + 1$ É quadrado perfeito.

7) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - 2xy$ Não é quadrado perfeito.

8) $m^2 - 4mn - 4n^2$ Não é quadrado perfeito.

COMO FATORAR UM TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO?

Fatorar um trinômio quadrado perfeito significa descobrir o quadrado do binômio-soma ou do binômio-diferença que lhe dá origem.

Exemplos:

$m^2 + 6mn + 9n^2 = (m + 3n)^2$

$\sqrt{m^2} = m$

$\sqrt{9n^2} = 3n$

Então:

$m^2 + 6mn + 9n^2 = (m + 3n)^2$

forma fatorada

$4x^2 + y^2 - 4xy = (2x - y)^2$

$\sqrt{4x^2} = 2x$

$\sqrt{y^2} = y$

Então:

$4x^2 + y^2 - 4xy = (2x - y)^2$

forma fatorada

> Perceba que os termos do binômio são as raízes dos termos quadrados perfeitos e que o sinal do binômio depende do sinal do termo não quadrado perfeito.

Complete adequadamente:

1) $m^2 + 2mn + n^2 = (m + n)^2$

2) $p^2 + q^2 - 2pq = (p - q)^2$

3) $25x^2 - 30xy + 9y^2 = (5x - 3y)^2$

4) $4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$

5) $\frac{m^2}{4} - 2m + 4 = \left(\frac{m}{2} - 2\right)^2$

6) $x^2 + \frac{1}{4} + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

7) $a^2 - ab + \frac{b^2}{4} = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2$

8) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2$

Encontre a forma fatorada dos trinômios quadrados perfeitos:

1) $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

2) $x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2$

3) $4a^2 + 12a + 9 = (2a+3)^2$

4) $x^2y^2 - 28xy + 196 = (xy - 14)^2$

5) $a^2b^2 - 2ab + 1 = (ab - 1)^2$

6) $a^2b^2 + 2abx + x^2 = (ab + x)^2$

7) $a^4 + 6a^2 + 9 = (a^2 + 3)^2$

8) $a^4 - 2a^2b^3 + b^6 = (a^2 - b^3)^2$

4.º CASO: DIFERENÇA DE DOIS QUADRADOS

A diferença de dois quadrados é a expressão resultante do desenvolvimento do produto indicado de um binômio-soma pelo seu binômio-diferença.

Exemplo:

$\underbrace{(x + 3)}_{\text{binômio-soma}} \cdot \underbrace{(x - 3)}_{\text{binômio-diferença}} = \boxed{x^2 - 9}$ (diferença de dois quadrados)

COMO FATORAR UMA DIFERENÇA DE DOIS QUADRADOS?

Fatorar uma diferença de dois quadrados significa encontrar o produto indicado do binômio-soma pelo seu binômio-diferença, cujo desenvolvimento dá origem a essa diferença.

Exemplos:

$\sqrt{4} = 2$ $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ $\sqrt{x^2} = x$	$\sqrt{9b^2} = 3b$ $4a^2 - 9b^2 = (2a + 3b)(2a - 3b)$ $\sqrt{4a^2} = 2a$

Observe que os termos dos binômios são as raízes dos termos da diferença de dois quadrados.

Complete corretamente:

1) $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

2) $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$

3) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

4) $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$

5) $a^2 - 4b^2 = (a + 2b)(a - 2b)$

6) $4m^2 - 25 = (2m + 5)(2m - 5)$

7) $a^4 - b^2 = (a^2 + b)(a^2 - b)$

8) $y^2 - 16 = (y + 4)(y - 4)$

9) $36 - n^2 = (6 + n)(6 - n)$

10) $x^6 - y^4 = (x^3 + y^2)(x^3 - y^2)$

Fatore as expressões:

1) $25a^2 - 81 = (5a + 9)(5a - 9)$

2) $x^4 - 4 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$

3) $y^6 - 25 = (y^3 + 5)(y^3 - 5)$

4) $x^2 - 9a^2 = (x + 3a)(x - 3a)$

5) $100m^2 - 49 = (10m + 7)(10m - 7)$

6) $49a^2x^2 - b^2 = (7ax + b)(7ax - b)$

7) $64x^2 - 36y^2 = (8x + 6y)(8x - 6y)$

8) $x^2y^4 - a^4 = (xy^2 + a^2)(xy^2 - a^2)$

9) $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$

10) $1 - 25a^2 = (1 + 5a)(1 - 5a)$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Fatore as expressões que constituem trinômio quadrado perfeito:

1) $a^4 + 8a^2 + 16 = (a^2 + 4)^2$

2) $a^8 - 6a^4 + 9 = (a^4 - 3)^2$

3) $x^6 + 25 - 10x^3 = (x^3 - 5)^2$

4) $9x^2 + 36x + 36 = (3x + 6)^2$

5) $25y^4 - 20xy^2 + 4x^2 = (5y^2 - 2x)^2$

6) $y^{14} - 2y^7 + 1 = (y^7 - 1)^2$

7) $49m^2 + 140m + 100 = (7m + 10)^2$

8) $81x^2 - 144xy + 64y^2 = (9x - 8y)^2$

b) Fatore as expressões que constituem uma diferença de dois quadrados:

1) $a^6 - 9 = (a^3 + 3)(a^3 - 3)$

2) $a^8 - 4 = (a^4 + 2)(a^4 - 2)$

3) $4a^2 - 1 = (2a + 1)(2a - 1)$

4) $16x^6 - 25 = (4x^3 + 5)(4x^3 - 5)$

5) $64x^2 - y^4 = (8x + y^2)(8x - y^2)$

6) $16x^4 - y^4 = (4x^2 + y^2)(4x^2 - y^2)$

7) $m^2 - 9x^4y^6 = (m + 3x^2y^3)(m - 3x^2y^3)$

8) $a^2b^2 - m^2n^2 = (ab + mn)(ab - mn)$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Complete, no quadro, a forma fatorada das expressões:

Expressão	Forma fatorada
$20a^2x^2 - 5a^3x^2$	$5a^2x^2\ (4 - a)$
$ap + aq - bq - bp$	$(p + q)\ (a - b)$
$15a^2b + 3ac - 20abm - 4mc$	$(3a - 4m)\ (5ab + c)$
$21x^2 + 3ax - 7xy - ay$	$(3x - y)\ (7x + a)$
$100x^2y^4 - 64$	$(10xy^2 + 8)\ (10xy^2 - 8)$
$a^2b^2c^2 - abc + \frac{1}{4}$	$\left(abc - \frac{1}{2}\right)^2$
$\frac{16}{49}x^2 - \frac{9}{16}y^2$	$\left(\frac{4}{7}x + \frac{3}{4}y\right)\left(\frac{4}{7}x - \frac{3}{4}y\right)$
$4p^6q^4 + 2p^3q^2 + \frac{1}{4}$	$\left(2p^3q^2 + \frac{1}{2}\right)^2$

b) Associe, no quadro, a coluna da esquerda com a da direita:

	Expressão		Forma fatorada
1	$(x + b)^2 - x^2$	3	$-4x$
2	$7x^2 - 28bx + 14cx$	7	$(x + 4)\ (x - 2)$
3	$(x - 1)^2 - (x + 1)^2$	2	$7x\ (x - 4b + 2c)$
4	$36a^4x^2 - 36a^2x^3 + 9x^4$	6	$(x + y)\ (x - a)$
5	$7x^2b - 14xb^2$	5	$7xb\ (x - 2b)$
6	$x^2 + xy - ax - ay$	1	$b\ (2x + b)$
7	$(x + 1)^2 - 9$	4	$(6a^2x - 3x^2)^2$

c) Fatore as expressões:

1) $x^2 - (x + 1)^2 = -2x - 1$

2) $(x - 2)^2 - (x + 2)^2 = -8x$

3) $15x^3y - 5x^3 + 21y - 7 = (3y - 1)(5x^3 + 7)$

4) $(a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$

5) $a^2 - ay - 6a + 6y = (a - y)(a - 6)$

6) $a^2 - b^2 - 5a + 5b = (a - b)(a + b - 5)$

Unidade 5 — O MAIOR DIVISOR COMUM E O MENOR MÚLTIPLO COMUM DE EXPRESSÕES

OS CONCEITOS DE M.D.C. E M.M.C.

Você já conhece esses conceitos e sabe como determinar o m.d.c. e o m.m.c. entre números naturais. Vamos fazer, então, uma breve recordação.

Exemplo:

Determine o m.d.c. e o m.m.c. dos números 60 e 40:

1.º passo	**2.º passo**	
Fatore os números, ou seja, decomponha-os em seus fatores primos:	Aplique os conceitos:	
60 | 2; 30 | 2; 15 | 3; 5 | 5; 1 — 40 | 2; 20 | 2; 10 | 2; 5 | 5; 1 $60 = 2.2.3.5$ $40 = 2.2.2.5$ $60 = 2^2.3.5$ $40 = 2^3.5$	m.d.c.: produto dos fatores primos **comuns**, com os **menores expoentes**: $60 = 2^2 . 3 . 5$ $40 = 2^3 . 5$ m.d.c. $(60, 40) = 2^2 . 5 = 20$	m.m.c.: produto dos fatores primos comuns e não-comuns, com os maiores expoentes. $60 = 2^2 . 3 . 5$ $40 = 2^3 . 5$ m.m.c. $(60, 40) =$ $= 2^3 . 3 . 5 = 120$

Determine o m.d.c. e o m.m.c. dos números:

1) 30 e 36

m.d.c. (30, 36) = 6

m.m.c. (30, 36) = 180

2) 84 e 24

m.d.c. (84, 24) = 12

m.m.c. (84, 24) = 168

3) 180, 40 e 28

m.d.c. (180, 40, 28) = 4

m.m.c. (180, 40, 28) = 2520

Agora vamos aplicar estes conceitos a expressões algébricas na forma fatorada. Veja:

Determine o m.d.c. e o m.m.c. das expressões:

1) $a^3b^4x^2$ e $a^2x^3z^2$

$a^3b^4x^2$

$a^2 \quad x^3 \quad z^2$

$\Longrightarrow$ m.d.c. $= a^2x^2$

m.m.c. $= a^3b^4x^3z^2$

2) $2^2 . 3x^4y^2$ e $2^3a^5x^2$

$2^2 . 3 \quad x^4y^2$

$2^3 \quad a^5x^2$

$\Longrightarrow$ m.d.c. $= 2^2x^2$

m.m.c. $= 2^3 . 3a^5x^4y^2$

Indique o m.d.c. e o m.m.c. das expressões na forma fatorada:

1) a^3x^4 e $a^2b^5y^2$

m.d.c. = a^2

m.m.c. = $a^3b^5x^4y^2$

2) $3x^4y^2$ e $3^2a^3y^3$

m.d.c. = $3y^2$

m.m.c. = $3^2a^3x^4y^3$

3) $2 . 3^2m^2n^3x^4$ e $3a^4n^2x^3$

m.d.c. = $3n^2x^3$

m.m.c. = $2\cdot3^2a^4m^2n^3x^4$

4) $2(x + 1)(x - 1)$ e $3(x - 1)^2$

m.d.c. = $(x-1)$

m.m.c. = $2\cdot3(x+1)(x-1)^2$

5) $(x + 2)^2(x + a)$ e $(x - 1)^2(x + a)$

m.d.c. = $(x + a)$

m.m.c. = $(x+2)^2 (x + a) (x - 1)^2$

6) $x^2(a + b)$ e $x(a + b)^3$

m.d.c. = $x (a + b)$

m.m.c. = $x^2(a + b)^3$

7) $2x^2(m + n)$ e $2x^3(m - n)$

m.d.c. = $2x^2$

m.m.c. = $2x^3(m + n)(m - n)$

8) $(x + 1)^2(2a + b)$ e $(x - 1)^3(2a + b)$

m.d.c. = $(2a + b)$

m.m.c. = $(x+1)^2 (2a + b) (x - 1)^3$

9) $3(x + y)$; $2(x + y)^2$ e $5(x + y)^3$

m.d.c. = $(x + y)$

m.m.c. = $2 \cdot 3 \cdot 5 (x + y)^3$

10) $a^2b^3(x + 3)^2$; $a^3(x + 3)$ e $b^2(x + 3)^2$

m.d.c. = $(x + 3)$

m.m.c. = $a^3b^3 (x + 3)^2$

COMO OBTER O M.D.C. E O M.M.C. DE EXPRESSÕES MONÔMIAS

Para determinar o m.d.c. e o m.m.c. de expressões monômias, basta decompor os coeficientes em fatores primos.

Exemplos:

1) $30a^2x$ e $33a^3x^2$

1.ª expressão fatorada	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot x$
2.ª expressão fatorada	$3 \cdot 11 \cdot a^3 \cdot x^2$
m.d.c.	$3 \cdot a^2 \cdot x = 3a^2x$
m.m.c.	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot a^3 \cdot x^2 = 330a^3x^2$

2) $9x^2yz^3$ e $6x^3y^2z^2$

1.ª expressão fatorada	$3^2 \cdot x^2 \cdot y \cdot z^3$
2.ª expressão fatorada	$2 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2$
m.d.c.	$3 \cdot x^2 \cdot y \cdot z^2 = 3x^2yz^2$
m.m.c.	$2 \cdot 3^2 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^3 = 18x^3y^2z^3$

EXERCÍCIOS

a) Complete os quadros:

1) $14a^2b^3c^4$ e $21a^4x^2$

1.ª expressão fatorada	$2 \cdot 7 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot c^4$
2.ª expressão fatorada	$3 \cdot 7 \cdot a^4 \cdot x^2$
m.d.c.	$7a^2$
m.m.c.	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a^4 \cdot b^3 \cdot c^4 \cdot x^2 = 42a^4b^3c^4x^2$

2) $12a^4b^2x^5$ e $16x^6y^2$

1.ª expressão fatorada	$2^2 \cdot 3 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot x^5$
2.ª expressão fatorada	$2^4 \cdot x^6 \cdot y^2$
m.d.c.	$2^2 \cdot x^5 = 4x^5$
m.m.c.	$2^4 \cdot 3 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot x^6 \cdot y^2 = 48a^4b^2x^6y^2$

3) $30x^4y^5$; $90x^2$ e $120x^3y^4$

1.ª expressão fatorada	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot y^5$
2.ª expressão fatorada	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot x^2$
3.ª expressão fatorada	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^3 \cdot y^4$
m.d.c.	$2 \cdot 3 \cdot 5x^2 = 30x^2$
m.m.c.	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot y^5 = 360x^4y^5$

4) $12a^3bx^2$; $8a^4x^5$ e $20a^3b^2x^3$

1.ª expressão fatorada	$2^2 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot b \cdot x^2$
2.ª expressão fatorada	$2^3 \cdot a^4 \cdot x^5$
3.ª expressão fatorada	$2^2 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot x^3$
m.d.c.	$2^2 \cdot a^3 \cdot x^2 = 4a^3x^2$
m.m.c.	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot x^5 = 120a^4b^2x^5$

b) Determine o m.d.c. e o m.m.c. das expressões:

1) $2a$; $3a$ e $6ab$

m.d.c. = a

m.m.c. = $6ab$

2) a^2b; ab e ac^2

m.d.c. = a

m.m.c. = a^2bc^2

3) $10a^2x^2$; $30a^3x$ e $20a^4$

m.d.c. = $10a^2$

m.m.c. = $60a^4x^2$

4) $2a^2$; $3a^3$ e $4a^4$

m.d.c. = a^2

m.m.c. = $12a^4$

5) $8a^2$; $16a^4$ e $24a^3$

m.d.c. = $8a^2$

m.m.c. = $48a^4$

6) a^2bc; ab^2c e abc^2

m.d.c. = abc

m.m.c. = $a^2b^2c^2$

7) $15a^4x^3$; $30a^4y$ e $25x^2y^2$

m.d.c. = 5

m.m.c. = $150a^4x^3y^2$

8) $4ab^3$ e $6a^2b^2x^4$

m.d.c. = $2ab^2$

m.m.c. = $12a^2b^3x^4$

9) $8a^4m^3n^2$; $16m^2n^3x^4$ e $32m^4x^2y^3$

m.d.c. = $8m^2$

m.m.c. = $32a^4m^4n^3x^4y^3$

10) $6m^2n^3$; $5a^2x^3$ e $7a^3m^4$

m.d.c. = 1

m.m.c. = $210a^3m^4n^3x^3$

COMO OBTER O M.D.C. E O M.M.C. DE EXPRESSÕES POLINÔMIAS

Em primeiro lugar, devem-se fatorar as expressões dadas e a seguir aplicar os conceitos de m.d.c. e m.m.c. Veja alguns exemplos:

Vamos determinar o m.d.c. e o m.m.c. das expressões:

1) $6x^2$ e $3x^2 + 3x$

1.ª expressão fatorada	$6x^2 = 2 \cdot 3x^2$
2.ª expressão fatorada	$3x^2 + 3x = 3x(x + 1)$
m.d.c.	$3x$
m.m.c.	$2 \cdot 3x^2(x + 1)$ ou $6x^2(x + 1)$

2) $a^2 + 2ab + b^2$ e $a^2 - b^2$

1.ª expressão fatorada	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
2.ª expressão fatorada	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
m.d.c.	$(a + b)$
m.m.c.	$(a + b)^2(a - b)$

VAMOS EXERCITAR

a) Complete os quadros:

1) $2ax + 3a$ e $4x^2 + 12x + 9$

1.ª expressão fatorada	$2ax + 3a = a(2x + 3)$
2.ª expressão fatorada	$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$
m.d.c.	$(2x + 3)$
m.m.c.	$a(2x + 3)^2$

2) $4y^2 - 20y + 25$ e $4y^2 - 25$

1.ª expressão fatorada	$4y^2 - 20y + 25 = (2y - 5)^2$
2.ª expressão fatorada	$4y^2 - 25 = (2y + 5)(2y - 5)$
m.d.c.	$(2y - 5)$
m.m.c.	$(2y - 5)^2(2y + 5)$

3) $2x + 2$; $3x + 3$ e $4x + 4$

1.ª expressão fatorada	$2x + 2 = 2(x+1)$
2.ª expressão fatorada	$3x + 3 = 3(x+1)$
3.ª expressão fatorada	$4x + 4 = 4(x+1) = 2^2(x+1)$
m.d.c.	$(x+1)$
m.m.c.	$2^2 \cdot 3(x+1) = 12(x+1)$

4) $mn + 2m$; $m^2n + 2m^2$ e $n^2 + 4n + 4$

1.ª expressão fatorada	$mn + 2m = m(n+2)$
2.ª expressão fatorada	$m^2n + 2m^2 = m^2(n+2)$
3.ª expressão fatorada	$n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$
m.d.c.	$(n+2)$
m.m.c.	$m^2(n+2)^2$

b) Determine o m.d.c. e o m.m.c. das expressões:

1) $3a^2x^2$; $6a^4x$ e $9x^2$
m.d.c. = $3x$
m.m.c. = $18a^4x^2$

2) $18m^2n^3$; $12am^3$ e $30a^5m^2n^4$
m.d.c. = $6m^2$
m.m.c. = $180a^5m^3n^4$

3) $x^2y - xy^2$ e $x^2 - y^2$
m.d.c. = $x - y$
m.m.c. = $xy(x+y)(x-y)$

4) $ax + bx$; $ay^2 + by^2$ e $a^2y + aby$
m.d.c. = $a + b$
m.m.c. = $axy^2(a+b)$

5) $a^2 - 1$; $ab - b$ e $2a - 2$
m.d.c. = $a - 1$
m.m.c. = $2b(a+1)(a-1)$

6) $x^2 - x$ e $x^3 - x^2$
m.d.c. = $x(x-1)$
m.m.c. = $x^2(x-1)$

7) $x^2 - 4$ e $4x + 8$
m.d.c. = $x + 2$
m.m.c. = $4(x+2)(x-2)$

8) $3x + 21$ e $x^2 + 14x + 49$
m.d.c. = $x + 7$
m.m.c. = $3(x+7)^2$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Ache o m.d.c. e o m.m.c. das expressões:

1) $35a^2x^3y$ e $42a^4x^5z^2$
m.d.c. = $7a^2x^3$
m.m.c. = $210a^4x^5yz^2$

2) $27a^4x^3$; $18a^2x^5$; $9a^5x^2$ e $6a^3x^4$
m.d.c. = $3a^2x^2$
m.m.c. = $54a^5x^5$

3) $4x^2 - 9$; $2x^2 + 3x$ e $4x^2 + 12x + 9$
m.d.c. = $2x + 3$
m.m.c. = $x(2x+3)^2(2x-3)$

4) $4y^2 - 81$ e $4y^2 - 36y + 81$
m.d.c. = $2y - 9$
m.m.c. = $(2y+9)(2y-9)^2$

5) $a^2 + ab$ e $b^2 + ab$
m.d.c. = $(a+b)$
m.m.c. = $ab(a+b)$

6) $x^2 + 5x$ e $xy + 5y$
m.d.c. = $x + 5$
m.m.c. = $xy(x+5)$

7) $ax - ay + bx - by$ e $ax + bx$
m.d.c. = $(a+b)$
m.m.c. = $x(a+b)(x-y)$

8) $ax + bx + 2a + 2b$ e $x^2 + 4x + 4$
m.d.c. = $(x+2)$
m.m.c. = $(x+2)^2(a+b)$

9) $axy - bxy$ e $am - an - bm + bn$
m.d.c. = $(a-b)$
m.m.c. = $xy(a-b)(m-n)$

10) $m^4 - 100$ e $m^3 - 10m$
m.d.c. = $(m^2 - 10)$
m.m.c. = $m(m^2+10)(m^2-10)$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Complete a tabela:

Expressão	Expressão	m.d.c.	m.m.c.
$12a^2x^3$	$9a^3x^2$	$3a^2x^2$	$36a^3x^3$
$25x^2 - 10x + 1$	$15x - 3$	$5x - 1$	$3(5x-1)^2$
$ay - a$	$by^2 - b$	$y - 1$	$ab(y+1)(y-1)$
$3am^2 - 27an^2$	$m^2 - 6mn + 9n^2$	$m + 3n$	$3a(m+3n)(m-3n)^2$
$3x + 6y$	$x^2 - 4y^2$	$x + 2y$	$3(x+2y)(x-2y)$
$3a^3x^2 - a^3 + 3bx^2 - b$	$a^6 - b^2$	$(a^3 + b)$	$(a^3+b)(a^3-b)(3x^2-1)$
$2ax + 5ay + 2bx + 5by$	$4x^2 - 25y^2$	$(2x + 5y)$	$(2x+5y)(2x-5y)(a+b)$

b) Assinale a alternativa correta.

1) O m.d.c. dos termos $60a^2b^4c$, $48a^4b^2c^3$ e $36a^5b^3c^2$ é:
a. ( ) $12\,abc$
b. (X) $12a^3b^2c$
c. ( ) $12a^5b^4c^3$
d. ( ) $36a^3b^2c$

2) O m.m.c. das expressões $x^2y - xy^2$, $(x - y)^2$ e $x^2y^4 - xy^5$ é:
a. ( ) $x - y$
b. ( ) xy^4
c. ( ) $(x - y)^2$
d. (X) $xy^4(x - y)^2$

3) O quociente entre o m.m.c. e o m.d.c. das expressões $ax + bx$, $ay^2 + by^2$ e $a^2y + aby$ é:
a. ( ) $a + b$
b. ( ) $axy^2(a + b)$
c. (X) axy^2
d. ( ) a

4) O produto entre o m.d.c. e o m.m.c. das expressões a^3b^2 e a^2x^5 é:
a. (X) $a^5b^2x^5$
b. ( ) $a^3b^2x^5$
c. ( ) a^2
d. ( ) ab^2x^5

5) O m.m.c. das expressões $bx + b$ e $x^2 + x$ é:
a. ( ) bx
b. (X) $bx(x + 1)$
c. ( ) $x + 1$
d. ( ) x

6) O m.d.c. das expressões $x + 1$, $x - 1$ e $x^2 - 1$ é:
a. ( ) $x + 1$
b. ( ) $x - 1$
c. ( ) $(x + 1)(x - 1)$
d. (X) 1

7) O m.d.c. e o m.m.c. das expressões $6mx + 3nx + 2my + ny$ e $4m^2 - n^2$ são, respectivamente:
a. ( ) $(2m + n)(2m - n)(3x + y)$ e $(2m + n)$.
b. ( ) $(3x + y)$ e $(3x + y)(2m + n)(2m - n)$.
c. (X) $(2m + n)$ e $(2m + n)(2m - n)(3x + y)$.
d. ( ) $(2m + n)$ e $(3x + y)(2m + n)$.

8) Sabendo que $a = 2$ e $x = 1$, o m.d.c. das expressões $3a^2x^5$ e $18a^3x^3$ é:
a. ( ) 3
b. (X) 12
c. ( ) 18
d. ( ) 8

AS FRAÇÕES ALGÉBRICAS

NOÇÃO DE FRAÇÃO ALGÉBRICA

Observe as expressões: $\frac{xy}{m}$; $\frac{5x^2}{3}$; $\frac{7}{bc}$; $\frac{a^2 - b^2}{a - 1}$

Elas representam o quociente indicado de expressões algébricas. São **frações algébricas**.

Então, podemos afirmar que:

> **Fração algébrica** ou **literal** é a fração em que pelo menos um dos seus termos (numerador ou denominador) contém numeral literal.

Como a fração algébrica representa um quociente indicado, o denominador deve ser diferente de zero, para não ocorrer impossibilidade operatória.

Veja:

$\frac{3a}{x - 1}$: numerador: $3a$; denominador: $x - 1 \neq 0 \Longrightarrow$ $\boxed{x \neq 1}$

Isto significa que **x** pode assumir qualquer valor, exceto o valor **1**. Esta restrição ($x \neq 1$) recebe o nome de **condição de existência**.

Complete o quadro:

Fração algébrica	Numerador	Denominador	Condição de existência
$\frac{2}{a - 2}$	2	$a - 2$	$a - 2 \neq 0$
$\frac{x^2y}{2x + y}$	x^2y	$2x + y$	$2x + y \neq 0$
$\frac{3a^2x}{5b^2y}$	$3a^2x$	$5b^2y$	$5b^2y \neq 0$
$\frac{a^2 - b^2}{a + b}$	$a^2 - b^2$	$a + b$	$a + b \neq 0$
$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy + 1}$	$x^2 + 2xy + y^2$	$xy + 1$	$xy + 1 \neq 0$
$\frac{a^2 - 4}{3a + 6}$	$a^2 - 4$	$3a + 6$	$3a + 6 \neq 0$
$\frac{4x^2 - 1}{4x^2 - 4x + 1}$	$4x^2 - 1$	$4x^2 - 4x + 1$	$4x^2 - 4x + 1 \neq 0$

SIMPLIFICAÇÃO DAS FRAÇÕES ALGÉBRICAS: UMA APLICAÇÃO DO M.D.C.

Simplificar uma fração algébrica é transformá-la em outra equivalente, expressa em termos mais simples.

Como se consegue isso?

Basta dividir os termos da fração pelo respectivo m.d.c. entre eles.

Observe: Simplifique a fração: $\frac{4a^2b}{6ab^2}$

1.º passo: fatorar os termos da fração.	**2.º passo**: achar o m.d.c. dos termos da fração.	**3.º passo**: dividir cada termo pelo m.d.c.	**Conclusão**
$4a^2b = 2^2a^2b$ $6ab^2 = 2 \cdot 3ab^2$	m.d.c. = 2ab	$4a^2b : 2ab = 2a$ $6ab^2 : 2ab = 3b$	$\frac{4a^2b}{6ab^2} = \frac{2a}{3b}$

COMO TORNAR MAIS PRÁTICA A SIMPLIFICAÇÃO

Para tornar mais prática a simplificação de uma fração algébrica, basta fatorar seus termos e, a seguir, eliminar os fatores comuns. Veja:

1) $\frac{4a^2b}{6ab^2} = \frac{\not{2} \cdot 2 \cdot \not{a} \cdot a \cdot \not{b}}{\not{2} \cdot 3 \cdot \not{a} \cdot b \cdot \not{b}} = \frac{2a}{3b}$

2) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x} = \frac{\cancel{(x + 1)}(x - 1)}{x\cancel{(x + 1)}} = \frac{x - 1}{x}$

3) $\frac{a + b}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{a + b}{(a + b)^2} = \frac{\cancel{a + b}}{\cancel{(a + b)}(a + b)} = \frac{1}{a + b}$

VAMOS EXERCITAR

Simplifique as frações:

1) $\frac{12a^2b^3}{18a^2b^2} =$

2) $\frac{14x^3y}{21x^2y^2} =$

3) $\frac{25abx^3}{15a^2x^2} =$

4) $\frac{24m^2nx}{18mn^2} =$

5) $\frac{10a^3bm}{20a^2b} =$

6) $\frac{3a + 3}{5a + 5} =$

7) $\frac{2x + 4}{3x + 6} =$

8) $\frac{x^3 + x^2}{2x + 2} =$

9) $\frac{x^2y - 5x^2}{xy - 5x} =$

10) $\frac{8x + 12}{10x + 15} =$

11) $\frac{6a + 6}{9a + 9} =$

12) $\frac{3a - 3b}{5a - 5b} =$

13) $\frac{6ab - 3a^2}{4b^2 - 2ab} =$

14) $\frac{m + n}{m^2 - n^2} =$

15) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + 1} =$

16) $\frac{b^2 - 1}{b^2 + b} =$

17) $\frac{4x^2 - 1}{4x^2 - 4x + 1} =$

18) $\frac{y^2 - 4}{3y + 6} =$

19) $\frac{ax^2 - x}{2x^3 - x} =$

20) $\frac{x^2 - 10x + 25}{2x - 10} =$

21) $\frac{4m^2 + 12mn + 9n^2}{4m^2 - 9n^2} =$

22) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} =$

23) $\frac{1 - x^2}{x + 1} =$

24) $\frac{1 - x^2}{x - 1} =$

25) $\frac{y^2 + 2y + 1}{1 + y} =$

26) $\frac{4x^2 + 12x + 9}{3x + 2x^2} =$

27) $\frac{x - 1}{1 - x} =$

28) $\frac{4 + m}{m^2 + 4m} =$

DESENVOLVA SUA CRIATIVIDADE

Simplifique as frações e mostre, através de valores atribuídos às letras, que a fração dada e a fração simplificada são equivalentes:

1) $\dfrac{3a^3b^2}{5a^2b} =$ 2) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} =$ 3) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{ab + b^2} =$

A REDUÇÃO DAS FRAÇÕES AO MENOR DENOMINADOR COMUM: UMA APLICAÇÃO DO M.M.C.

Você já estudou esse tipo de redução. Vamos apenas recordá-la.

Reduza as frações ao menor denominador comum: $\dfrac{2a}{3b^2}$ e $\dfrac{5a^2}{9b}$

1.º passo	2.º passo
Achar o m.m.c. dos denominadores, o qual será o denominador comum. $3b^2 = 3b^2$ $9b = 3^2b$ m.m.c. $= 3^2b^2$ m.m.c. $= 9b^2$ $\dfrac{2a}{3b^2}$ e $\dfrac{5a^2}{9b}$ $\dfrac{}{9b^2}$ e $\dfrac{}{9b^2}$	Dividir o m.m.c. pelo denominador e multiplicar pelo numerador da fração dada. O resultado será o numerador da fração procurada. $\Rightarrow \dfrac{6a}{9b^2}$ e $\dfrac{5a^2b}{9b^2}$ $9b^2 : 3b^2 = 3$ $3 \cdot 2a = 6a$ $9b^2 : 9b = b$ $b \cdot 5a^2 = 5a^2b$

Reduza as frações ao menor denominador comum:

1) $\dfrac{b}{2a}, \dfrac{a}{4b}$ m.m.c. = $4ab$ $\quad \dfrac{2b^2}{4ab}, \dfrac{a^2}{4ab}$

2) $\dfrac{x+1}{5x^2}, \dfrac{x-1}{10x}$ m.m.c. = $10x^2$ $\quad \dfrac{2(x+1)}{10x^2}, \dfrac{x(x-1)}{10x^2}$

3) $\dfrac{3x-2}{5xy}, \dfrac{2x+3}{15x^2y}$ m.m.c. = $15x^2y$ $\quad \dfrac{3x(3x-2)}{15x^2y}, \dfrac{2x+3}{15x^2y}$

4) $\dfrac{2a}{3x}, \dfrac{5}{9ax}$ m.m.c. = $9ax$ $\quad \dfrac{6a^2}{9ax}, \dfrac{5}{9ax}$

5) $\dfrac{1}{x-2}, \dfrac{1}{x+3}$ m.m.c. = $(x-2)(x+3)$ $\quad \dfrac{x+3}{(x-2)(x+3)}, \dfrac{x-2}{(x-2)(x+3)}$

6) $\dfrac{3x}{x+1}, \dfrac{x}{x^2-1}$ m.m.c. = x^2-1 $\quad \dfrac{3x(x-1)}{x^2-1}, \dfrac{x}{x^2-1}$

7) $\dfrac{2}{x+2}, \dfrac{3}{x-2}, \dfrac{4}{x^2-4}$ m.m.c. = x^2-4 $\quad \dfrac{2(x-2)}{x^2-4}, \dfrac{3(x+2)}{x^2-4}, \dfrac{4}{x^2-4}$

8) $\dfrac{a}{x^2-y^2}, \dfrac{b}{x^2+xy}, \dfrac{c}{x^2-xy}$ m.m.c. = $x(x^2-y^2)$ $\quad \dfrac{ax}{x(x^2-y^2)}, \dfrac{b(x-y)}{x(x^2-y^2)}, \dfrac{c(x+y)}{x(x^2-y^2)}$

9) $\dfrac{2a-3b}{4a^2}, \dfrac{3a+2b}{6ab}$ m.m.c. = $12a^2b$ $\quad \dfrac{3b(2a-3b)}{12a^2b}, \dfrac{2a(3a+2b)}{12a^2b}$

10) $\dfrac{2x}{x+3}, \dfrac{3}{x^2+6x+9}$ m.m.c. = x^2+6x+9 $\quad \dfrac{2x(x+3)}{x^2+6x+9}, \dfrac{3}{x^2+6x+9}$

DESENVOLVA SUA CRIATIVIDADE

Reduza as frações ao mesmo denominador, sem achar o m.m.c. dos denominadores:

1) $\frac{3x}{x^2 + 3x}$ e $\frac{2x - 6}{x^2 - 9}$

2) $\frac{5x + 5}{x^2 - 1}$, $\frac{6x}{3x - 3}$ e $\frac{2y}{xy - y}$

3) $\frac{m^2 + 2mn}{m^2 + 4mn + 4n^2}$, $\frac{3x}{mx + 2nx}$ e $\frac{am - 2an}{m^2 - 4n^2}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Simplifique as frações:

1) $\frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}$

2) $\frac{4x^5}{12x^7} = \frac{1}{3x^2}$

3) $\frac{64a^2}{32a^3} = \frac{2}{a}$

4) $\frac{a^4x^2}{a^5x} = \frac{x}{a}$

5) $\frac{8a^3b^2}{24a^2b^3} = \frac{a}{3b}$

6) $\frac{32x^2y^4z^3}{20x^4y^2z^4} = \frac{8y^2}{5x^2z}$

7) $\frac{y^2 - 1}{y - 1} = y + 1$

8) $\frac{a + b}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a - b}$

9) $\frac{a^2 + b^2}{a^4 - b^4} = \frac{1}{a^2 - b^2}$

10) $\frac{a^2 - ab}{3a - 3b} = \frac{a}{3}$

11) $\frac{4x^2 - 12x + 9}{2x^2 - 3x} = \frac{2x - 3}{x}$

12) $\frac{xy - bx + 4y - 4b}{ax + 4a} = \frac{y - b}{a}$

b) Reduza ao menor denominador comum:

1) $\frac{a}{4}$ e $\frac{b}{3}$

$\frac{3a}{12}$ e $\frac{4b}{12}$

2) $\frac{a}{bc}$, $\frac{b}{ac}$ e $\frac{c}{ab}$

$\frac{a^2}{abc}$, $\frac{b^2}{abc}$ e $\frac{c^2}{abc}$

3) $\frac{a}{a - b}$ e $\frac{c}{a^2 - b^2}$

$\frac{a(a+b)}{a^2 - b^2}$ e $\frac{c}{a^2 - b^2}$

4) $\frac{2x}{a + 2}$ e $\frac{x}{a}$

$\frac{2ax}{a(a+2)}$ e $\frac{x(a+2)}{a(a+2)}$

5) $\frac{2a}{a - 2}$, $\frac{a + 1}{a^2 - 2a}$ e $\frac{a + 2}{a}$

$\frac{2a^2}{a(a-2)}$, $\frac{a+1}{a(a-2)}$ e $\frac{(a+2)(a-2)}{a(a-2)}$

6) $\frac{3}{x - 4}$ e $\frac{x}{x^2 - 8x + 16}$

$\frac{3(x-4)}{(x-4)^2}$ e $\frac{x}{(x-4)^2}$

7) $\frac{3x}{2a - 2}$, $\frac{5}{4a - 4}$ e $\frac{x^2}{3a - 3}$

$\frac{18x}{12(a-1)}$, $\frac{15}{12(a-1)}$ e $\frac{4x^2}{12(a-1)}$

8) $\frac{5}{y + 3}$, $\frac{2x}{y - 3}$ e $\frac{ax}{y^2 - 9}$

$\frac{5(y-3)}{y^2 - 9}$, $\frac{2x(y+3)}{y^2 - 9}$ e $\frac{ax}{y^2 - 9}$

9) $\frac{2x}{ax + 2a}$ e $\frac{3x^2}{2ax + 4a}$

$\frac{4x}{2a(x+2)}$ e $\frac{3x^2}{2a(x+2)}$

10) $\frac{3}{8x^3}$, $\frac{1}{4x}$ e $\frac{5}{6x^2y}$

$\frac{9y}{24x^3y}$, $\frac{6x^2y}{24x^3y}$ e $\frac{20x}{24x^3y}$

Agora estudaremos as seguintes operações com frações algébricas:

- Adição algébrica (adição e subtração); • Multiplicação; • Divisão; • Potenciação.

ADIÇÃO ALGÉBRICA

1.º CASO: AS FRAÇÕES APRESENTAM O MESMO DENOMINADOR

Regra: Adicionam-se os numeradores e conserva-se o denominador.

Observe os exemplos:

1) $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} = \frac{a + b - c}{m}$

2) $\frac{a + 2}{x - 1} - \frac{a + 1}{x - 1} = \frac{(a + 2) - (a + 1)}{x - 1} = \frac{a + 2 - a - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1}$

Efetue as adições algébricas:

1) $\frac{2a}{x} + \frac{3a}{x} - \frac{a}{x} = \frac{4a}{x}$

2) $\frac{4a}{c} + \frac{2x}{c} - \frac{2a}{c} + \frac{3x}{c} = \frac{2a + 5x}{c}$

3) $\frac{x + 1}{y} + \frac{2x + 3}{y} = \frac{3x + 4}{y}$

4) $\frac{2x + 3}{a} - \frac{x - 2}{a} = \frac{x + 5}{a}$

5) $\frac{a + 1}{a + b} - \frac{a + 2}{a + b} + \frac{a + 3}{a + b} = \frac{a + 2}{a + b}$

6) $\frac{2m}{y^2} + \frac{3m}{y^2} - \frac{4m}{y^2} = \frac{m}{y^2}$

7) $\frac{5}{x + 3} - \frac{3}{x + 3} + \frac{1}{x + 3} = \frac{3}{x + 3}$

8) $\frac{4a + 1}{xy} - \frac{2a - 3}{xy} = \frac{2a + 4}{xy}$

9) $\frac{a}{2x} - \frac{3a}{2x} + \frac{a}{2x} = \frac{-a}{2x}$

10) $\frac{m - 1}{m + 2} - \frac{m - 4}{m + 2} = \frac{3}{m + 2}$

2.º CASO: AS FRAÇÕES NÃO APRESENTAM O MESMO DENOMINADOR

Regra: Reduzem-se as frações ao mesmo denominador e procede-se como no caso anterior.

Veja o exemplo:

$\frac{2b}{3x} + \frac{3a}{2x^2}$

m.m.c. = $6x^2$

$\frac{4bx}{6x^2} + \frac{9a}{6x^2} = \frac{4bx + 9a}{6x^2}$

Disposição prática

$\frac{2b}{3x} + \frac{3a}{2x^2} = \frac{4bx + 9a}{6x^2}$

Encontre a soma algébrica:

1) $\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} = \frac{3 + 4x}{6x^2}$

2) $\frac{3}{5x} - \frac{7}{10x} = -\frac{1}{10x}$

3) $\frac{x}{2y} + \frac{2x}{3y} - \frac{3x}{4y} = \frac{5x}{12y}$

4) $\frac{2}{x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{2x - 8}{x^2 - 4}$

5) $\frac{3x}{x - 2} + \frac{x}{2x - 4} = \frac{7x}{2(x - 2)}$

6) $\frac{x + 1}{a - 3} - \frac{x + 3}{2a - 6} = \frac{x - 1}{2(a - 3)}$

7) $\frac{2}{x + 4} - \frac{4}{x - 4} + \frac{3}{x^2 - 16} = \frac{-2x - 21}{x^2 - 16}$

8) $\frac{y - 1}{2a + 2x} + \frac{y + 1}{3a + 3x} = \frac{5y - 1}{6(a + x)}$

9) $\frac{m - 1}{2m + 2} - \frac{m - 2}{3m + 3} = \frac{1}{6}$

10) $\frac{x + 2b^2}{bx + b} - \frac{2b}{x + 1} = \frac{x}{b(x + 1)}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Efetue as adições algébricas:

1) $a + \dfrac{b}{4} = \dfrac{4a+b}{4}$

2) $x - \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{-x}{x-1}$

3) $m - \dfrac{m+n}{2} = \dfrac{m-n}{2}$

4) $a - \dfrac{a^2}{a+x} = \dfrac{ax}{a+x}$

5) $\dfrac{x}{4} - 2x + \dfrac{x}{2} = -\dfrac{5x}{4}$

6) $\dfrac{2x}{5} - \dfrac{x}{5} - \dfrac{7x}{5} = \dfrac{-6x}{5}$

7) $\dfrac{x+y}{x} + \dfrac{x-y}{x} = 2$

8) $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a+b} = 1$

9) $\dfrac{x^2}{x-y} - \dfrac{y^2}{x-y} = x+y$

10) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{x^2-1}$

11) $1 + \dfrac{b^2 - a^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2}$

12) $\dfrac{2}{a+6} - \dfrac{3}{a-6} + \dfrac{4}{a^2-36} = \dfrac{-a-26}{a^2-36}$

13) $\dfrac{x-1}{2x+2} - \dfrac{3x-4}{3x+3} - \dfrac{2x+10}{6x+6} = \dfrac{5}{6}$

14) $\dfrac{2x-1}{x-2} - \dfrac{2x-5}{x-2} = \dfrac{4}{x-2}$

MULTIPLICAÇÃO

Regra: Multiplicam-se os numeradores entre si e os denominadores entre si.

Exemplos:

1) $\dfrac{2a}{3x} \cdot \dfrac{b^2}{c^3} = \dfrac{2ab^2}{3xc^3}$

2) $\dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{3x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{3x}{x^2-1}$

Efetue as multiplicações

1) $\dfrac{3ab}{2x^2} \cdot \dfrac{5a}{4x} = \dfrac{15a^2b}{8x^3}$

2) $\dfrac{2xy^2}{3a^4} \cdot \dfrac{x^2}{3a} \cdot \dfrac{2x}{b^2} = \dfrac{4x^4y^2}{9a^5b^2}$

3) $\dfrac{a}{x+2} \cdot \dfrac{3a}{x-2} = \dfrac{3a^2}{x^2-4}$

4) $\dfrac{5}{x^2} \cdot \dfrac{2}{x} \cdot \dfrac{3}{x^3} = \dfrac{30}{x^6}$

5) $\dfrac{x}{m} \cdot \dfrac{x^2}{m^2} \cdot \dfrac{x^3}{m^3} = \dfrac{x^6}{m^6}$

6) $\dfrac{2}{a+b} \cdot \dfrac{3}{a-b} = \dfrac{6}{a^2-b^2}$

7) $\dfrac{5x}{m-2} \cdot \dfrac{2x}{m-2} = \dfrac{10x^2}{m^2-4m+4}$

8) $\dfrac{5x}{y+1} \cdot \dfrac{x^2}{y+3} = \dfrac{5x^3}{y^2+4y+3}$

9) $\dfrac{2}{ax^2} \cdot \dfrac{3}{a^2x} = \dfrac{6}{a^3x^3}$

10) $\dfrac{5a}{x+3} \cdot \dfrac{2a^2}{x+3} = \dfrac{10a^3}{x^2+6x+9}$

UM RECURSO IMPORTANTE: A SIMPLIFICAÇÃO

Se houver fatores comuns no numerador e no denominador (mesmo que não sejam da mesma fração), é aconselhável a eliminação desses fatores, pois assim a multiplicação ficará mais simples.

Veja alguns exemplos:

1) $\dfrac{1}{\cancel{a^2}} \cdot \dfrac{\cancel{a^2}}{b} = \dfrac{1}{b}$

2) $\dfrac{2a}{a-b} \cdot \dfrac{a^2-b^2}{a^2} = \dfrac{2\cancel{a}}{\cancel{a-b}} \cdot \dfrac{(a+b)\cancel{(a-b)}}{\cancel{a} \cdot a} = \dfrac{2(a+b)}{a}$

Efetue as multiplicações:

1) $\frac{2ac}{3b} \cdot \frac{2b}{5c} = \frac{4a}{15}$

2) $\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2b^2}{c^4}$

3) $\frac{3a^2b^3}{2xy} \cdot \frac{3x^2y^2}{2ab^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{9aby}{4}$

4) $\frac{3a-6}{2a} \cdot \frac{3a^2}{a-2} = \frac{9a}{2}$

5) $\frac{x^2-5x}{x+5} \cdot \frac{x^2-25}{x} = (x-5)(x-5)$

6) $3ab \cdot \frac{5}{2a} = \frac{15b}{2}$

7) $\frac{8a^2}{2b} \cdot 4ab = 16a^3$

8) $\frac{m}{m+n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{m}{m+m}$

9) $\frac{x}{x^2-y^2} \cdot (x+y) = \frac{x}{x-y}$

10) $\frac{2x}{m+n} \cdot (m^2-n^2) = 2x(m-m)$

11) $(y-4) \cdot \frac{2x}{y^2-16} = \frac{2x}{y+4}$

12) $ax \cdot \frac{3a}{a^2x^2+2ax} = \frac{3a}{ax+2}$

13) $\frac{1}{a} \cdot (a^2-2a) = a-2$

14) $\frac{a+b}{a^2-b^2} \cdot \frac{2a-2b}{ac-a} \cdot \frac{c-1}{2} = \frac{1}{a}$

DIVISÃO

Regra: Multiplica-se a primeira fração pela fração inversa da segunda.

Exemplos:

1) $\frac{5a^2b^2}{2xy} : \frac{2ab}{3xy} = \frac{5a^2b^2}{2xy} \cdot \frac{3xy}{2ab} = \frac{5 \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot b \cdot \cancel{b}}{2 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y}} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y}}{2 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b}} = \frac{15ab}{4}$

2) $\frac{a^2+ab}{ab+bc} : \frac{ab+b^2}{a^2+ac} = \frac{a^2+ab}{ab+bc} \cdot \frac{a^2+ac}{ab+b^2} = \frac{a\cancel{(a+b)}}{b\cancel{(a+c)}} \cdot \frac{a\cancel{(a+c)}}{b\cancel{(a+b)}} = \frac{a^2}{b^2}$

Encontre o quociente:

1) $\frac{a^2}{b^2} : \frac{a^3}{b^3} = \frac{b}{a}$

2) $\frac{4a^2b^3}{c^5} : \frac{16a^2b^4}{c^6} = \frac{c}{4b}$

3) $\frac{a^2-b^2}{x+y} : \frac{a-b}{x^2-y^2} = (a+b)(x-y)$

4) $\frac{m^2-n^2}{x^2-y^2} : \frac{m+n}{x+y} = \frac{m-m}{x-y}$

5) $\frac{ab+b^2}{a^2} : \frac{a+b}{a} = \frac{b}{a}$

6) $9a^2b : \frac{3a^3b^2}{c} = \frac{3c}{ab}$

7) $x^2 : \frac{x}{y} = xy$

8) $ab : \frac{ab}{x} = x$

9) $\frac{3x^2}{a} : 6x^3 = \frac{1}{2ax}$

10) $(m-n) : \frac{m^2-mn}{x} = \frac{x}{m}$

11) $4ab : \frac{b}{a} = 4a^2$

12) $\frac{10x}{x+y} : 15x = \frac{2}{3(x+y)}$

13) $\frac{x-y}{2x} : (x^2-y^2) = \frac{1}{2x(x+y)}$

14) $\frac{a^2}{a+1} : a^2 = \frac{1}{a+1}$

15) $a : \frac{a}{c} = c$

16) $\frac{x^2-4}{3x} : (x+2) = \frac{x-2}{3x}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Efetue as operações:

1) $\frac{2x}{3y} \cdot \frac{6y^2}{5a} \cdot \frac{15a^2}{x^2} = \frac{12ay}{x}$

2) $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b}$

3) $\frac{p^2 - q^2}{a+b} \cdot \frac{2a+2b}{2p-2q} = p + q$

4) $\frac{m^2 - 2mn + n^2}{7m - 14n} \cdot \frac{m^2 - 4n^2}{m - n} = \frac{(m-n)(m+2n)}{7}$

5) $\frac{ab - ay + bx - xy}{2a + 2x} \cdot \frac{2}{b^2 - y^2} = \frac{1}{b+y}$

6) $\frac{a^2 - b^2}{3xy} : \frac{6a - 6b}{xy} = \frac{a+b}{18}$

7) $\frac{1}{a^2 - 2a + 1} : \frac{a+1}{a-1} = \frac{1}{a^2-1}$

8) $\frac{m-n}{m} : \frac{2m-2n}{5m} = \frac{5}{2}$

9) $\frac{x^2 - 6x}{12a} : \frac{x-6}{3a} = \frac{x}{4}$

10) $\frac{px + qx}{15x^3} : \frac{p+q}{20x^2} = \frac{4}{3}$

POTENCIAÇÃO

Regra: Eleva-se cada termo da fração ao expoente indicado.

Observe:

$$\left(\frac{3a^2}{5x^3}\right)^2 = \frac{(3a^2)^2}{(5x^3)^2} = \frac{9a^4}{25x^6} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{3a^2}{5x^3}\right)^2 = \frac{3a^2}{5x^3} \cdot \frac{3a^2}{5x^3} = \frac{9a^4}{25x^6}$$

VAMOS EXERCITAR

Determine a potência:

1) $\left(\frac{a^2}{2b^3}\right)^2 = \frac{a^4}{4b^6}$

2) $\left(-\frac{3x^4}{5y^2}\right)^2 = \frac{9x^8}{25y^4}$

3) $\left(\frac{1}{2a^3b^2}\right)^4 = \frac{1}{16a^{12}b^8}$

4) $\left(\frac{2x}{x-1}\right)^2 = \frac{4x^2}{x^2 - 2x + 1}$

5) $\left(-\frac{3a^2x^3}{2by^2}\right)^3 = \frac{27a^6x^9}{8b^3y^6}$

6) $\left(-\frac{a+b}{2x}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4x^2}$

7) $\left(\frac{x^2y^4}{a^5b^3}\right)^4 = \frac{x^8y^{16}}{a^{20}b^{12}}$

8) $\left(-\frac{2a}{3b^2x^4}\right)^4 = \frac{16a^4}{81b^8x^{16}}$

9) $\left(\frac{a^2b^3c^5}{x^2y^4}\right)^6 = \frac{a^{12}b^{18}c^{30}}{x^{12}y^{24}}$

10) $\left(\frac{x-1}{3y}\right)^2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{9y^2}$

11) $\left(\frac{2x^3}{m+n}\right)^2 = \frac{4x^6}{m^2 + 2mn + n^2}$

12) $\left(\frac{x-2}{a^3}\right)^2 = \frac{x^2 - 4x + 4}{a^6}$

13) $\left(\frac{y-3}{y-2}\right)^2 = \frac{y^2 - 6y + 9}{y^2 - 4y + 4}$

14) $\left(\frac{1}{2m-n}\right)^2 = \frac{1}{4m^2 - 4mn + n^2}$

15) $\left(\frac{3}{x-3y}\right)^2 = \frac{9}{x^2 + 6xy + 9y^2}$

16) $\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^2 = \frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 + 6x + 9}$

17) $\left(\frac{x^2y^3}{2m+3n}\right)^2 = \frac{x^4y^6}{4m^2 + 12mn + 9n^2}$

18) $\left(\frac{a-b}{2x+y}\right)^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4x^2 + 4xy + y^2}$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Simplifique as frações:

1) $\frac{2xy}{x} = 2y$

2) $\frac{6a^2b}{2a^3x} = \frac{3b}{ax}$

3) $\frac{12a^3x^4}{2a^2x^2} = 6ax^2$

4) $\frac{36mn^3}{81m^2n} = \frac{4n^2}{9m}$

5) $\frac{5p^2q}{15p^5q^3} = \frac{1}{3p^2q^2}$

6) $\frac{3x-6}{9} = \frac{x-2}{3}$

7) $\frac{25x^2-49y^2}{5x^2-7xy} = \frac{5x+7y}{x}$

8) $\frac{a^2+6a+9}{3a+9} = \frac{a+3}{3}$

9) $\frac{10a^2-2ab}{15ab-3b^2} = \frac{2a}{3b}$

10) $\frac{7ax-8ay+7bx-8by}{7ax-8ay-7bx-8by} = \frac{a+b}{a-b}$

b) Reduza ao menor denominador comum:

1) $\frac{2b}{3a^3}$, $\frac{1}{6a^2}$ e $\frac{c}{12a}$ $\left(\frac{8b}{12a^3}, \frac{2a}{12a^3} \text{ e } \frac{a^2c}{12a^3}\right)$

2) $\frac{3}{5ax^2}$, $\frac{7}{10x}$ e $\frac{m^2}{2a}$ $\left(\frac{6}{10ax^2}, \frac{7ax}{10ax^2} \text{ e } \frac{5x^2m^2}{10ax^2}\right)$

3) $\frac{a+1}{ax+bx}$ e $\frac{b-1}{ay+by}$ $\left(\frac{y(a+1)}{xy(a+b)} \text{ e } \frac{x(b-1)}{xy(a+b)}\right)$

4) $\frac{1}{ab-b^2}$ e $\frac{1}{am-bm}$ $\left(\frac{m}{mb(a-b)} \text{ e } \frac{b}{mb(a-b)}\right)$

5) $\frac{1}{1+a}$, $\frac{1}{1-a}$ e $\frac{2a}{1-a^2}$ $\left(\frac{1-a}{1-a^2}, \frac{1+a}{1-a^2} \text{ e } \frac{2a}{1-a^2}\right)$

6) $\frac{a}{2-x}$, $\frac{b}{2+x}$ e $\frac{y}{4-x^2}$ $\left(\frac{a(2+x)}{4-x^2}, \frac{b(2-x)}{4-x^2} \text{ e } \frac{y}{4-x^2}\right)$

7) $\frac{5}{3a^2}$ e $\frac{8}{a^3}$ $\left(\frac{5a}{3a^3} \text{ e } \frac{24}{3a^3}\right)$

8) $\frac{1}{5x^2}$ e $\frac{6}{4ax^3}$ $\left(\frac{4ax}{20ax^3} \text{ e } \frac{30}{20ax^3}\right)$

9) $\frac{3x}{m^2}$ e $\frac{1}{5m}$ $\left(\frac{15x}{5m^2} \text{ e } \frac{m}{5m^2}\right)$

10) $\frac{x-2}{5a}$ e $\frac{a+3}{2a^2}$ $\left(\frac{2a(x-2)}{10a^2} \text{ e } \frac{5(a+3)}{10a^2}\right)$

c) Efetue as operações:

1) $\frac{2a}{3b} + \frac{5a}{6b} = \frac{3a}{2b}$

2) $\frac{x-2}{x} + \frac{7}{3x} = \frac{3x+1}{3x}$

3) $\frac{2a-2b}{12a} + \frac{a+b}{6a} = \frac{1}{3}$

4) $\frac{3}{m+1} + \frac{2}{m-1} + \frac{m}{m^2-1} = \frac{6m-1}{m^2-1}$

5) $\frac{2}{4a-b} + \frac{5}{4a+b} + \frac{1}{16a^2-b^2} = \frac{28a-3b+1}{16a^2-b^2}$

6) $\frac{4a}{3x} - \frac{5a}{6x} = \frac{a}{2x}$

7) $\frac{m-1}{9a} - \frac{m+2}{12a} = \frac{m-10}{36a}$

8) $\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1} = \frac{-2x+1}{x^2-x}$

9) $\frac{5}{x+2} - \frac{2}{x-3} = \frac{3x-19}{x^2-x-6}$

10) $\frac{a+1}{2a-4} - \frac{a-1}{3a-6} = \frac{a+5}{6(a-2)}$

11) $\frac{2a}{x} \cdot \frac{2x}{9} = \frac{4a}{9}$

12) $\frac{2x+1}{5x} \cdot \frac{35}{10x+5} = \frac{7}{5x}$

13) $\frac{2a^3b^2}{5c^2d^3} \cdot \frac{5c^3d^2}{4a^2b^3} = \frac{ac}{2bd}$

14) $\frac{a^2+ax}{a-x} \cdot \frac{a^2-ax}{a^2-a} = \frac{a(a+x)}{a-1}$

15) $\frac{a^2+3a}{a^2-9} \cdot \frac{a^2-2a}{a^2-4} = \frac{a^2}{(a-3)(a+2)}$

16) $\frac{2x+8}{x^3} \cdot \frac{x^2}{xy+4y} = \frac{2}{xy}$

17) $\frac{2(a-1)}{a+5} \cdot \frac{a+1}{2a-2} = \frac{2(a+1)}{a+5}$

18) $\frac{x^2-y^2}{a+b} \cdot \frac{2a+2b}{x-y} = 2(x+y)$

19) $\frac{18x^3}{ax+bx} \cdot \frac{3a+3b}{6xy} = 9x$

20) $\frac{ab+b}{ac-2c} \cdot \frac{a^2-2a}{3a+3} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{3}$

21) $\frac{5a}{6x} : \frac{2a}{3x} = \frac{5}{4}$

22) $\frac{12a^3b^4}{5x^2y} : \frac{8a^3b^2}{15x^2y^2} = \frac{9b^2y}{2}$

23) $\frac{c}{a+2} : \frac{2c}{a^2-4} = \frac{a-2}{2}$

24) $\frac{a+x}{a-x} : \frac{3a+3x}{2a-2x} = \frac{2}{3}$

25) $\frac{a^2+6a+9}{a^2-4} : \frac{a+3}{a-2} = \frac{a+3}{a+2}$

26) $\left(\frac{m^2-4}{m+2}\right)^2 = m^2-4m+4$

d) Testes:

1) Efetuando-se a operação $\frac{x^2-4}{x^2-25} : \frac{x+2}{x-5}$, obtém-se:

a. ( ) 0

b. ( ) 1

c. ( ) $x-5$

d. (X) $\frac{x-2}{x+5}$

2) A expressão $\frac{3x^2-4x}{x^2-1} : \frac{3x-4}{x^2+2x+1}$ equivale a:

a. (X) $\frac{x(x+1)}{x-1}$

b. ( ) $x+1$

c. ( ) $x-1$

d. ( ) $x-2$

3) A expressão $\frac{2a+2b}{5x-5y} \cdot \frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}$ equivale a:

a. ( ) $\frac{2}{5}$

b. (X) $\frac{2(x+y)}{5(a-b)}$

c. ( ) $\frac{2x+y}{5a-b}$

d. ( ) nada disso

4) Efetuando-se a operação $\frac{x^2-9}{x^2+3x} + \frac{x^2-4}{x^2+2x}$, obtém-se:

a. ( ) x^2+x

b. (X) $\frac{2x-5}{x}$

c. ( ) -3

d. ( ) x^2

5) Efetuando-se a operação $\frac{x}{x^2+2x} + \frac{x-3}{x^2+4x+4}$, obtém-se:

a. ( ) $\frac{x-1}{(x+2)^2}$

b. ( ) $\frac{2x+5}{(x+2)^2}$

c. (X) $\frac{2x-1}{(x+2)^2}$

d. ( ) $\frac{-1}{(x+2)^2}$

EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

AS SENTENÇAS

Vamos recordar o estudo das sentenças.

Analisemos as sentenças, indicando se elas são verdadeiras ou falsas.

- O Brasil é o país de maior extensão territorial da América do Sul.

  Essa sentença, como você sabe, é uma verdade.

- A capital do Brasil é Belo Horizonte.

  Essa sentença, no entanto, não é uma verdade.

Pois bem, sentenças como essas, que podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas, são denominadas **sentenças fechadas**.

Agora vamos analisar outras sentenças:

- Amanhã ele irá ao cinema.

Você não pode afirmar que essa sentença é verdadeira ou falsa, pois não sabe quem é **ele** e se realmente irá ou não ao cinema.

- Adicionando cinco ao dobro de um número, obtemos onze.

  Com relação a essa sentença também não podemos afirmar se é verdadeira ou falsa.

  Sentenças que não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas são denominadas **sentenças abertas**.

Assinale com V as sentenças verdadeiras e com F as falsas e anote se a sentença é aberta ou fechada:

1) Urano é um planeta do Sistema Solar. (V) Sentença fechada.
2) Ele está na 7.ª série do 1.º grau. (?) Sentença aberta.
3) O ano de 1981 marca o início de uma nova década. (V) Sentença fechada.
4) O século XXI inicia-se no ano 2000. (F) Sentença fechada.
5) Adicionando dez ao dobro de um número, obtemos vinte. (?) Sentença aberta.

DESENVOLVA SUA CRIATIVIDADE

Invente com cada um dos elementos abaixo dois exemplos de sentenças, uma aberta e outra fechada:

1) Júpiter: sentença aberta: ____________________

   sentença fechada: ____________________

2) Áries: sentença aberta: ____________________

   sentença fechada: ____________________

UM TIPO ESPECIAL DE SENTENÇA ABERTA: A EQUAÇÃO

Quando uma sentença aberta dada em linguagem matemática é expressa por uma igualdade, ela recebe o nome de **equação**.

Veja:

- Adicionando dois a um número, obtemos o dobro desse número.

Número: x

Dobro do número: $2x$

Então: $x + 2 = 2x$

Esta igualdade é uma equação do 1.º grau, pois o maior expoente da variável **x** é 1.

- Subtraindo cinco do quadrado de um número, obtemos o quádruplo desse número.

Número: x
Quadrado do número: x^2
Quádruplo do número: 4x

Então: $x^2 - 5 = 4x$

Esta igualdade é uma equação do 2.º grau, pois o maior expoente da variável **x** é 2.

VAMOS EXERCITAR

a) Dadas as sentenças em linguagem comum, obtenha as equações correspondentes:

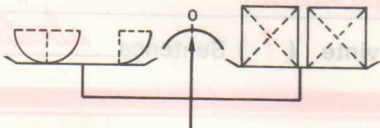
1) Adicionando um número a quatro, obtemos quinze.
Equação: $x + 4 = 15$

2) Adicionando dois à metade de um número, obtemos sete.
Equação: $\frac{x}{2} + 2 = 7$

3) Subtraindo sete da terça parte de um número, obtemos zero.
Equação: $\frac{x}{3} - 7 = 0$

4) O dobro de um número é igual a esse número mais oito.
Equação: $2x = x + 8$

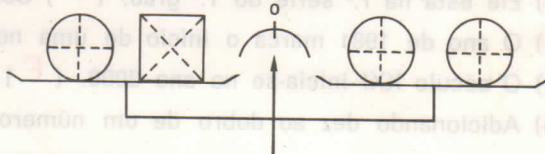
5) Adicionando o dobro de um número ao quadrado deste número, obtemos vinte e quatro.
Equação: $2x + x^2 = 24$

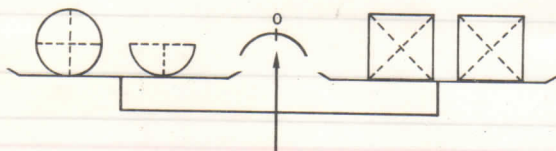
6) Subtraindo o triplo de um número do quadrado deste número, obtemos zero.
Equação: $x^2 - 3x = 0$

7) Subtraindo um da raiz quadrada de um número, obtemos dois.
Equação: $\sqrt{x} - 1 = 2$

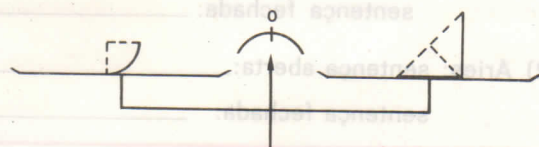
8) A raiz quadrada de um número diminuído em um resulta dois.
Equação: $\sqrt{x - 1} = 2$

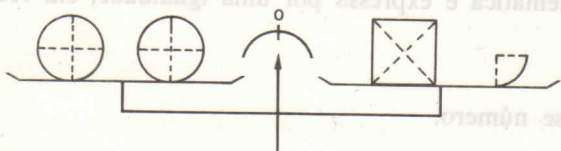
b) Observe o modelo e, a seguir, escreva em linguagem matemática a sentença correspondente a cada figura:

Legenda	Exercício modelo
(círculo) representa **x**; (quadrado) representa a unidade	Sentença: $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 1 + 1$

3)

Sentença: $x + 1 = x + x$

1)

Sentença: $x + \frac{x}{2} = 1 + 1$

4)

Sentença: $\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$

2)

Sentença: $x + x = 1 + \frac{x}{4}$

5)

Sentença: $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Invente sentenças em linguagem comum que expressem as seguintes equações:

1) $\frac{x-2}{2} = 4$ Sentença: ______

2) $\frac{x}{2} - 2 = 4$ Sentença: ______

CONJUNTO VERDADE DE UMA EQUAÇÃO DO 1.º GRAU

Considere a sentença aberta $2x + 5 = 11$, que é uma equação do 1.º grau.

Quais os valores atribuídos à variável **x** que tornam essa sentença verdadeira?

Para descobrir os valores de **x** que tornam a sentença verdadeira e que recebem o nome de raízes, você precisa resolver a equação.

Então vejamos:

Resolva e indique em $U = \mathbb{N}$ o conjunto verdade da equação $2x + 5 = 11$:

Resolução	Verificação	Resposta
$2x + 5 = 11$ $2x = 11 - 5$ $2x = 6$ $x = \frac{6}{2}$ $x = 3$	$2x + 5 \overset{?}{=} 11$ $2 \cdot (3) + 5 = 11$ $6 + 5 = 11$ $11 = 11$ (V)	3 é o valor que torna a sentença verdadeira; então 3 é a raiz da equação. Logo: $V = \{3\}$.

EXERCÍCIOS

Equação: $2x - 7 = 5(x - 2)$	Equação: $\frac{x+1}{3} = \frac{x-1}{4}$	Equação: $\frac{3x}{4} - \frac{x-1}{3} = 2$
Resolução: $2x - 7 = 5(x-2)$ $2x - 7 = 5x - 10$ $2x - 5x = -10 + 7$ $-3x = -3\ (-1)$ $3x = 3$ $x = \frac{3}{3}$ $x = 1$	Resolução: $\frac{x+1}{3} = \frac{x-1}{4}$ $\frac{4(x+1)}{12} = \frac{3(x-1)}{12}$ $4x + 4 = 3x - 3$ $4x - 3x = -3 - 4$ $x = -7$	Resolução: $\frac{3x}{4} - \frac{x-1}{3} = 2$ $\frac{9x}{12} - \frac{4(x-1)}{12} = \frac{24}{12}$ $9x - 4x + 4 = 24$ $9x - 4x = 24 - 4$ $5x = 20$ $x = 4$
Verificação: $2x - 7 = 5(x-2)$ $2 \cdot (1) - 7 = 5(1-2)$ $2 - 7 = 5(-1)$ $-5 = -5$ (V)	Verificação: $\frac{x+1}{3} = \frac{x-1}{4}$ $\frac{-7+1}{3} = \frac{-7-1}{4}$ $\frac{-6}{3} = \frac{-8}{4}$ $-2 = -2$ (V)	Verificação: $\frac{3x}{4} - \frac{x-1}{3} = 2$ $\frac{3 \cdot (4)}{4} - \frac{4-1}{3} = 2$ $3 - 1 = 2$ $2 = 2$ (V)
Logo: 1 é a raiz. $V = \{1\}$	Logo: −7 é a raiz. $V = \{-7\}$	Logo: 4 é a raiz. $V = \{4\}$

Agora pense nesta questão:

Num determinado conjunto universo, o conjunto verdade de uma equação do 1.º grau é sempre unitário, ou seja, toda equação do 1.º grau admite sempre uma única raiz?

A resposta a essa questão é a seguinte: o conjunto verdade de uma equação do 1.º grau pode ser vazio, unitário ou infinito, ou seja, a equação pode não ter raiz, ter uma raiz ou uma infinidade de raízes. Veja o porquê no quadro que segue.

Equação: $2x + 8 = 2$	**Equação**: $2x - 5 = 9 + 2x$	**Equação**: $x + x + 2 = 2(x + 1)$
Resolução: $2x + 8 = 2$ $2x = 2 - 8$ $2x = -6$ $x = -\frac{6}{2} = -3$ **Então:** Se $U = \mathbb{N} \Longrightarrow V = \{\ \}$ Se $U = \mathbb{Z} \Longrightarrow V = \{-3\}$ Se $U = \mathbb{Q} \Longrightarrow V = \{-3\}$ Perceba que, dependendo do conjunto universo, o número -3 participa ou não do conjunto verdade. Esta equação não tem raiz em $\mathbb{N}$. Entretanto, tem uma raiz em $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$. Para indicar a **existência** de raiz (em $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$), adotou-se a simbologia: $\exists\, x \mid 2x + 8 = 2$ (Lê-se: existe **x** tal que $2x + 8 = 2$.) O símbolo $\exists$ chama-se **quantificador existencial**.	Resolução: $2x - 5 = 9 + 2x$ $2x - 2x = 9 + 5$ $0\,\boxed{x} = 14$ Não há número que multiplicado por zero tenha como resultado o número 14. **Então:** Se $U = \mathbb{N} \Longrightarrow V = \{\ \}$ Se $U = \mathbb{Z} \Longrightarrow V = \{\ \}$ Se $U = \mathbb{Q} \Longrightarrow V = \{\ \}$ **Atenção**: Quando ocorrer $\boxed{0 . x = \text{qualquer número} \neq \text{zero}}$, a equação não tem raiz e o conjunto verdade é sempre vazio. Para indicar a **não-existência** de raiz, adotou-se a simbologia: $\nexists\, x \mid 2x - 5 = 9 + 2x$ (Lê-se: não existe **x** tal que $2x - 5 = 9 + 2x$.)	Resolução: $x + x + 2 = 2(x + 1)$ $x + x + 2 = 2x + 2$ $2x + 2 = 2x + 2$ $2x - 2x = 2 - 2$ $0\,\boxed{x} = 0$ Qualquer número multiplicado por zero resulta zero. **Então:** Se $U = \mathbb{N} \Longrightarrow V = \mathbb{N}$ Se $U = \mathbb{Z} \Longrightarrow V = \mathbb{Z}$ Se $U = \mathbb{Q} \Longrightarrow V = \mathbb{Q}$ **Atenção**: Quando ocorrer $\boxed{0 . x = 0}$, a equação admite uma infinidade de raízes e o conjunto verdade é igual ao conjunto universo. Para indicar que qualquer número é raiz, adotou-se a simbologia: $\forall\, x,\ x + x + 2 = 2(x + 1)$ (Lê-se: qualquer que seja x, $x + x + 2 = 2(x + 1)$.) O símbolo $\forall$ chama-se **quantificador universal**. Este tipo de equação recebe o nome de **identidade**.

VAMOS EXERCITAR

Resolva as equações em $U = \mathbb{Q}$, dê as respostas usando os quantificadores e indique se são ou não identidades:

$3(x + 2) = 3x + 7$	$\frac{2(x+1)}{5} + \frac{x-4}{10} = \frac{x}{2}$	$\frac{3x}{4} - \frac{2}{5} = x - \frac{1}{10}$
$3x + 6 = 3x + 7$ $3x - 3x = 7 - 6$ $0x = 1$	$\frac{4(x+1)}{10} + \frac{x-4}{10} = \frac{5x}{10}$ $4x + 4 + x - 4 = 5x$ $4x + x - 5x = 4 - 4$ $0x = 0$	$\frac{15x}{20} - \frac{8}{20} = \frac{20x}{20} - \frac{2}{20}$ $15x - 8 = 20x - 2$ $15x - 20x = -2 + 8$ $-5x = 6\ (-1)$ $5x = -6$ $x = -\frac{6}{5}$
Resposta: $\nexists x \mid 3(x+2) = 3x + 7$	Resposta: $\forall x,\ \frac{2(x+1)}{5} + \frac{x-4}{10} = \frac{x}{2}$	Resposta: $\exists x \mid \frac{3x}{4} - \frac{2}{5} = x - \frac{1}{10}$
Logo: ☐ é identidade. ☒ não é identidade.	Logo: ☒ é identidade. ☐ não é identidade.	Logo: ☐ é identidade. ☒ não é identidade.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Assinale com **V** as sentenças verdadeiras e com **F** as falsas e classifique-as em abertas ou fechadas:

1) A baleia é um mamífero que vive na água. (V) Sentença *fechada.*

2) O leão é um animal invertebrado. (F) Sentença *fechada.*

3) Ele nasceu sob o signo de Libra. (?) Sentença *aberta.*

4) O conjunto $\mathbb{N}$ é infinito. (V) Sentença *fechada.*

5) Cinco negativo não pertence ao conjunto $\mathbb{Q}$. (F) Sentença *fechada.*

6) Adicionando uma unidade a um número, obtemos seis. (?) Sentença *aberta.*

7) O Sol é uma estrela de quinta grandeza. (V) Sentença *fechada.*

8) A Floresta Amazônica recebe a denominação de "inferno verde". (V) Sentença *fechada.*

9) O único mês do ano que apresenta 28 dias é fevereiro. (F) Sentença *fechada.*

10) Pero Vaz de Caminha levou ao Rei de Portugal a carta relatando o descobrimento do Brasil. (F) Sentença *fechada.*

b) Escreva as equações correspondentes às seguintes sentenças dadas em linguagem comum:

1) A multiplicação entre cinco e um número racional tem como resultado o produto dez negativo.

Equação: $5 \cdot x = -10$

2) Adicionando cinco à quarta parte de um número, obtemos a metade desse número.

Equação: $\frac{x}{4} + 5 = \frac{x}{2}$

3) Subtraindo quatro do quadrado de um número, obtemos o triplo desse número.

Equação: $x^2 - 4 = 3x$

4) A soma de dois números inteiros consecutivos é igual a quinze.

Equação: $x + x + 1 = 15$

5) Adicionando a um número par o seu consecutivo, obtém-se dez.

Equação: $2x + 2x + 2 = 10$

6) Subtraindo dois da raiz quadrada do dobro de um número, obtemos a quarta parte desse número.

Equação: $\sqrt{2x} - 2 = \frac{x}{4}$

c) Resolva as equações e dê as respostas em $U = \mathbb{Q}$, usando os quantificadores:

$2x + 5(x - 2) = -10$	$3(2x - 4) = 2(3x - 6)$	$\frac{x - 2}{5} = \frac{3x + 1}{2}$	$\frac{x - 1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2x - 5}{6}$
$2x + 5x - 10 = -10$	$6x - 12 = 6x - 12$	$\frac{2(x-2)}{10} = \frac{5(3x+1)}{10}$	$\frac{4(x-1)}{12} - \frac{3}{12} = \frac{2(2x-5)}{12}$
$2x + 5x = -10 + 10$	$6x - 6x = -12 + 12$	$2(x-2) = 5(3x+1)$	$4(x-1) - 3 = 2(2x-5)$
$7x = 0$	$0x = 0$	$2x - 4 = 15x + 5$	$4x - 4 - 3 = 4x - 10$
$x = \frac{0}{7}$		$2x - 15x = 5 + 4$	$4x - 4x = -10 + 4 + 3$
$x = 0$		$-13x = 9 \ (-1)$	$0x = -3$
		$13x = -9$	
		$x = -\frac{9}{13}$	
R.: $\exists x \mid 2x + 5(x-2) = -10$	R.: $\forall x, 3(2x-4) = 2(3x-6)$	R.: $\exists x \mid \frac{x-2}{5} = \frac{3x+1}{2}$	R.: $\nexists x \mid \frac{x-1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2x-5}{6}$

d) Responda:

Das quatro equações da questão anterior, a única que constitui uma identidade é: $3(2x-4) = 2(3x-6)$

e) Descubra:

1) Johann Carl Friedrich Gauss, considerado o príncipe da Matemática, nasceu no século XVIII.
O ano de nascimento de Gauss é representado por um numeral em que:
- a soma dos valores absolutos dos algarismos é igual a vinte e dois;
- o algarismo das unidades simples é igual ao algarismo das dezenas.

Em que ano Gauss nasceu?

R.: 1777

2) Joaquim Gomes de Sousa, conhecido por Sousinha, é considerado o maior matemático brasileiro. Este gênio nasceu no Maranhão, no século XIX.
O ano de nascimento de Sousinha é representado por um numeral em que:
- a soma dos valores absolutos dos algarismos é igual a vinte;
- a soma dos valores absolutos dos algarismos das dezenas e centenas é igual à soma dos valores absolutos dos algarismos das unidades simples e das unidades de milhar.

Em que ano Sousinha nasceu?

R.: 1829

O RECONHECIMENTO DE UMA IDENTIDADE

Como você viu, a equação que admite uma infinidade de raízes é uma identidade. Então:

> Identidade é uma sentença expressa por uma igualdade que se torna verdadeira para qualquer valor atribuído à variável.

Vamos considerar a igualdade $2(x-7)+10 = 2(x-2)$ e atribuir alguns valores à variável **x**.

Veja:

x = 1	**x = 2**	**x = 8**
$2(x-7)+10=2(x-2)$	$2(x-7)+10=2(x-2)$	$2(x-7)+10=2(x-2)$
$\downarrow \quad ? \quad \downarrow$	$\downarrow \quad ? \quad \downarrow$	$\downarrow \quad ? \quad \downarrow$
$2(1-7)+10=2(1-2)$	$2(2-7)+10=2(2-2)$	$2(8-7)+10=2(8-2)$
$2\,.\,(-6)+10=2\,.\,(-1)$	$2\,.\,(-5)+10=2\,.\,(0)$	$2\,.\,(1)+10=2\,.\,(6)$
$-12+10=-2$	$-10+10=0$	$2+10=12$
$-2=-2$ (V)	$0=0$ (V)	$12=12$ (V)

Note que a igualdade se tornou verdadeira para os valores 1, 2 e 8, atribuídos à variável.

Se você resolver a equação, verificará que essa igualdade se torna verdadeira para qualquer valor atribuído à variável.

Observe:

$$2(x-7)+10=2(x-2)$$

$$2x-14+10=2x-4$$

$$2x-2x=-4+14-10$$

$$0\boxed{x}=0$$

↑ Qualquer número multiplicado por zero resulta zero.

Logo:

$2(x-7)+10=2(x-2)$ é uma identidade, ou seja:

$\forall\, x,\ 2(x-7)+10=2(x-2)$

Você poderá reconhecer de duas maneiras se uma equação é ou não uma identidade.

Veja:

1.ª) **Através da resolução**	2.ª) **Através de transformações**
Resolve-se a equação. Se se chegar em $0 \, . \, x = 0$, a equação é uma identidade; caso contrário, não. **Exemplo:** $2(x + 5) - 3 = 7 + 2x$ $2x + 10 - 3 = 7 + 2x$ $2x - 2x = 7 - 10 + 3$ $0 \, . \, x = 0$ **Então,** $2(x + 5) - 3 = 7 + 2x$ é uma identidade.	Fazem-se transformações no primeiro ou no segundo membro ou, então, em ambos os membros, de modo a obter expressões idênticas no primeiro e segundo membros. Se se chegar em expressões idênticas, é uma identidade; caso contrário, não. **Exemplo:** $2(x + 5) - 3 = 7 + 2x$ eliminando os parênteses $2x + 10 - 3 = 7 + 2x$ efetuando $2x + 7 = 7 + 2x$ propriedade comutativa $7 + 2x = 7 + 2x$ expressões idênticas **Então,** $2(x + 5) - 3 = 7 + 2x$ é uma identidade.

Verifique, por resolução, se estas equações são ou não identidades:

Bloco 1: aplicação da propriedade distributiva

$2(x - 4) - 5 = 7 + 3x$	$5x - 2 = 5(x + 1) - 7$	$3(x + 2) - 2(x - 1) = x + 8$
$2x - 8 - 5 = 7 + 3x$ $2x - 3x = 7 + 8 + 5$ $-x = 20 \; (-1)$ $x = -20$	$5x - 2 = 5x + 5 - 7$ $5x - 5x = 5 - 7 + 2$ $0x = 0$	$3x + 6 - 2x + 2 = x + 8$ $3x - 2x - x = 8 - 6 - 2$ $0x = 0$
Logo: ☐ é identidade. ☒ não é identidade.	**Logo:** ☒ é identidade. ☐ não é identidade.	**Logo:** ☒ é identidade. ☐ não é identidade.

Bloco 2: multiplicação de polinômios

$(x - 1)(x - 2) = x^2 + 11$	$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 6$	$(x + 1)(2x - 1) = 2x^2 + x - 1$
$x^2 - 2x - x + 2 = x^2 + 11$ $-2x - x = 11 - 2$ $-3x = 9 \; (-1)$ $3x = -9$ $x = -\frac{9}{3}$ $x = -3$	$x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 6$ $3x + 2x = 6 - 6$ $5x = 0$ $x = \frac{0}{5}$ $x = 0$	$2x^2 - x + 2x - 1 = 2x^2 + x - 1$ $-x + 2x - x = -1 + 1$ $0x = 0$
Logo: ☐ é identidade. ☒ não é identidade.	**Logo:** ☐ é identidade. ☒ não é identidade.	**Logo:** ☒ é identidade. ☐ não é identidade.

Bloco 3: produto notável

$(x+1)^2 = x^2 + 5$	$(x+3)^2 - 2x = (x+2)^2 + 5$	$(x-4)^2 = x^2 - 9x$
$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 5$ $2x = 5 - 1$ $2x = 4$ $x = \frac{4}{2}$ $x = 2$	$x^2 + 6x + 9 - 2x = x^2 + 4x + 4 + 5$ $6x - 2x - 4x = 4 + 5 - 9$ $0x = 0$	$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 9x$ $-8x + 9x = -16$ $x = -16$
Logo: ☐ é identidade. ☒ não é identidade.	**Logo:** ☒ é identidade. ☐ não é identidade.	**Logo:** ☐ é identidade. ☒ não é identidade.

Através de transformações, prove que estas equações são identidades:

Bloco 1: aplicação da propriedade distributiva

$4(3x - 2) - 2(x - 4) = 5(2x - 5) + 9$

1.° membro	2.° membro
$4(3x-2) - 2(x+4)$	$5(2x-5) + 9$
$12x - 8 - 2x - 8$	$10x - 25 + 9$
$10x - 16$	$10x - 16$

$\boxed{10x - 16} = \boxed{10x - 16}$ expressões idênticas

$4\left(x - \frac{1}{2}\right) - 6\left(x - \frac{2}{3}\right) = 2(1 - x)$

1.° membro	2.° membro
$4(x - \frac{1}{2}) - 6(x - \frac{2}{3})$	$2(1-x)$
$4x - 2 - 6x + 4$	$2 - 2x$
$-2x + 2$	$-2x + 2$

$\boxed{-2x + 2} = \boxed{-2x + 2}$ expressões idênticas

Bloco 2: multiplicação de polinômios

$(x + 1)(x + 2) = (x - 1)(x - 2) + 6x$

1.° membro	2.° membro
$(x+1)(x+2)$	$(x-1)(x-2) + 6x$
$x^2 + 2x + x + 2$	$x^2 - 2x - x + 2 + 6x$
$x^2 + 3x + 2$	$x^2 + 3x + 2$

$\boxed{x^2 + 3x + 2} = \boxed{x^2 + 3x + 2}$ expressões idênticas

$(a + 5)(a + 6) + 6a = (a + 2)(a + 15)$

1.° membro	2.° membro
$(a+5)(a+6) + 6a$	$(a+2)(a+15)$
$a^2 + 6a + 5a + 30 + 6a$	$a^2 + 15a + 2a + 30$
$a^2 + 17a + 30$	$a^2 + 17a + 30$

$\boxed{a^2 + 17a + 30} = \boxed{a^2 + 17a + 30}$ expressões idênticas

Bloco 3: produto notável

$(x + y)^2 - y^2 = x(x + 2y)$

1.° membro	2.° membro
$(x+y)^2 - y^2$	$x(x + 2y)$
$x^2 + 2xy + y^2 - y^2$	$x^2 + 2xy$
$x^2 + 2xy$	

$\boxed{x^2 + 2xy} = \boxed{x^2 + 2xy}$ expressões idênticas

$(x - 4)^2 + (x + 2)^2 = 2x^2 - 4(x - 5)$

1.° membro	2.° membro
$(x-4)^2 + (x+2)^2$	$2x^2 - 4(x-5)$
$x^2 - 8x + 16 + x^2 + 4x + 4$	$2x^2 - 4x + 20$
$2x^2 - 4x + 20$	

$\boxed{2x^2 - 4x + 20} = \boxed{2x^2 - 4x + 20}$ expressões idênticas

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Verifique, por meio de resolução ou de transformação, se estas equações são ou não identidades:

1) $2(x - 5) = 2(x - 4)$ ______

2) $2x(x + y) + y^2 = (x + y)^2 + x^2$ (identidade)

3) $(x + 1)(x - 1) + x^2 = 2x^2 - 1$ (identidade)

4) $(a + 4)(a + 2) - a^2 = 2(3a + 4)$ (identidade)

5) $(a - 1)(2a - 6) = 2a(a - 4) + 6$ (identidade)

6) $2y(y + 2) = 2(y^2 + 4)$ ______

7) $(m^2 - 3)(m - 1) = m^2(m - 1) - 3(m - 1)$ (identidade)

8) $\left(4x - \frac{3}{4}\right) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$ ______

9) $(m - 5)^2 - m^2 = 5(5 - 2m)$ (identidade)

10) $(a - 3)^2 - 2(a + 5) = a(a - 8) - 1$ (identidade)

11) $(a + 2)^2 = a^2$ ______

12) $(x + 2y)^2 = x^2 + 4y(x + y)$ (identidade)

13) $2(2x - 3) - 2(x - 3) = 2x$ (identidade)

14) $\frac{2x}{3} - \frac{x}{2} = \frac{1}{6}$ ______

15) $\frac{3a + 5}{2} = \frac{2a - 5}{3}$ ______

16) $2y(y - 3) + 3(2y - 5) = 2y^2$ ______

b) Coloque no ☐ o termo algébrico adequado para que as equações se tornem identidades:

1) $2(x - 4) = 2x - \boxed{8}$

2) $3(\boxed{2x} - 5) = 6x - \boxed{15}$

3) $(a - 1)^2 + 3 = a^2 - 2a + \boxed{4}$

4) $(x - 5)^2 - \boxed{x^2} = 25 - 10x$

5) $5(2x - 3) - (x - 1) = \boxed{9x} - 14$

6) $(x - 1)(x + 1) = x(x - 1) - 1 + \boxed{x}$

7) $(2x - 5)(x - 2) = \boxed{2x^2} - 9x + 10$

8) $b^2 + \boxed{4b} - 1 = (b + 2)^2 - 5$

9) $3(2x - 7) + 27 = 6(\boxed{x} + 1)$

10) $2(x - 1) + 3(x + 1) = \boxed{5x} + 1$

c) Prove, por meio de transformações, que estas equações são identidades:

1) $3(2x - 8) - 2(5x + 1) = -4(x + 9) + 10$

2) $5(a^2 - 2) + a^2 = a(2a + 5) + 4a^2 - 5(a + 2)$

3) $(x + 1)^2 - 1 = x(x + 2)$

4) $(2x - 3)^2 - 9 = 4x(x - 3)$

5) $\frac{x + 1}{2} - \frac{2x - 3}{4} = \frac{1}{4}$

6) $(2x + 1)(2x - 1) + 5 = 4(x^2 + 1)$

7) $(a + 1)(a + 3) + 3(a^2 - 1) = 4a(a + 1)$

8) $(a + b)(a - b) + 2b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

9) $(3x + 4)(x + 1) - 3(x^2 + 1) = 7(x + 1)$

10) $\frac{2x}{3} + \frac{3x - 2}{4} = \frac{11x}{12} + \frac{x - 1}{2}$

d) Associe as expressões das colunas I e II de modo que, ligadas pelo sinal =, tornem-se identidades:

Coluna I	Coluna II
1) $(x + 4)^2 - x^2$	(3) $1 - x$
2) $3(5x - 1) - 12x$	(4) $(x + 1)(x - 1)$
3) $2(x + 3) - 3(x - 4) - 17$	(1) $8(x + 2)$
4) $(x - 2)^2 + 4x - 5$	(2) $3(x - 1)$

Agora escreva estas identidades:

$(x+4)^2 - x^2 = 8(x+2)$

$3(5x-1) - 12x = 3(x-1)$

$2(x+3) - 3(x-4) - 17 = 1 - x$

$(x-2)^2 + 4x - 5 = (x+1)(x-1)$

AS EQUAÇÕES LITERAIS

As equações do 1.º grau que você viu até o momento não apresentam nenhuma outra letra além da variável. Essas equações são chamadas de **equações numéricas**.

Exemplo: $3(x - 5) = 2x + 1$

Agora você vai estudar equações do 1.º grau com uma variável e com outras letras como constantes. São as chamadas **equações literais**.

Exemplo: $3(x - a) = 2x + b$

x = variável

a, b = constantes

Classifique em numérica ou literal as seguintes equações do 1.º grau com uma variável:

1) $\frac{3x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{x}{2}$ Equação numérica

2) $2(ax + b) = 3(x + a)$ Equação literal

3) $3(2x - 4) = 2(2x + 5)$ Equação numérica

4) $\frac{ax}{b} - \frac{bx}{a} = ab$ Equação literal

5) $2x + 3(x - 1) = 2(x + 1)$ Equação numérica

6) $x(a + b) = ab$ Equação literal

7) $\frac{x + 1}{2} - \frac{x - 2}{3} = \frac{x - 3}{4}$ Equação numérica

8) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{x}{5}$ Equação numérica

9) $5a + x = 2x - 4b$ Equação literal

10) $3ay + 4b = 5by - 5a$ Equação literal

Indique a variável e as constantes das seguintes equações literais:

1) $3(ax + b) = 5bx$
Variável: x
Constantes: a e b

2) $4(a - y) = 5(y - b)$
Variável: y
Constantes: a e b

3) $mx + nx = mn$
Variável: x
Constantes: m e n

4) $\frac{y}{a^2 - b^2} + \frac{2y}{a - b} = \frac{5}{a + b}$
Variável: y
Constantes: a e b

COMO ENCONTRAR A RAIZ DE UMA EQUAÇÃO LITERAL?

Observe o quadro, em que aparecem a resolução de uma equação numérica e a de uma equação literal.

Equação numérica: $3(4x - 2) = 2(3x + 1)$

$3(4x - 2) = 2(3x + 1)$

propriedade distributiva | propriedade distributiva

$12x - 6 = 6x + 2$

isolamento da variável

$12x - 6x = 2 + 6$

efetuando as operações

$6x = 8$

$x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\boxed{x = \frac{4}{3}}$

Equação literal: $3(ax - 2) = 2(x + 1)$

$3(ax - 2) = 2(x + 1)$

propriedade distributiva | propriedade distributiva

$3ax - 6 = 2x + 2$

isolamento da variável

$3ax - 2x = 2 + 6$

fatorando por evidência | efetuando a adição

$(3a - 2)x = 8$

$\boxed{x = \frac{8}{3a - 2}}$

Uma vez encontrada a raiz, devem-se excluir os valores das letras que anulam o denominador. Isso porque não é possível a divisão por zero.

Veja: $x = \dfrac{8}{3a - 2}$

O denominador 3a − 2 deve ser diferente de zero. Portanto: $\begin{cases} 3a - 2 \neq 0 \quad \text{ou} \\ 3a \neq 2 \quad \text{ou} \\ a \neq 2/3 \end{cases}$

Resolva as equações literais (U = ℚ):

Bloco 1

$ax - b = 0$	$ax - b = 1$	$ax + b = 0$	$ax + b = 2$	$ax - 1 = b$
$ax = b$	$ax = 1 + b$	$ax = -b$	$ax = 2 - b$	$ax = b + 1$
$x = \frac{b}{a}$	$x = \frac{1+b}{a}$	$x = -\frac{b}{a}$	$x = \frac{2-b}{a}$	$x = \frac{b+1}{a}$
Condição: $a \neq 0$	Condição: $a \neq 0$	Condição: $a \neq 0$	Condição: $a \neq 0$	Condição: $a \neq 0$

Bloco 2

$2ax + ab = ax$	$3ax - 5 = ax$	$2by - 3 = -by$	$5bx - 4 = 2bx + 5$
$2ax - ax = -ab$	$3ax - ax = 5$	$2by + by = 3$	$5bx - 2bx = 5 + 4$
$ax = -ab$	$2ax = 5$	$3by = 3$	$3bx = 9$
$x = -\frac{ab}{a}$	$x = \frac{5}{2a}$	$y = \frac{3}{3b}$	$x = \frac{9}{3b}$
$x = -b$		$y = \frac{1}{b}$	$x = \frac{3}{b}$
Condição: $a \neq 0$	Condição: $a \neq 0$	Condição: $b \neq 0$	Condição: $b \neq 0$

Bloco 3

$ax + 2 = x + 3$	$ax - 3 = bx + 1$	$2(ax - 3) - 1 = 4bx$
$ax - x = 3 - 2$	$ax - bx = 1 + 3$	$2ax - 6 - 1 = 4bx$
$(a-1)x = 1$	$(a+b)x = 4$	$2ax - 4bx = 1 + 6$
$x = \frac{1}{a-1}$	$x = \frac{4}{a-b}$	$(2a - 4b)x = 7$
		$x = \frac{7}{2a-4b}$
Condição: $a - 1 \neq 0$; $a \neq 1$	Condição: $a - b \neq 0$; $a \neq b$	Condição: $2a - 4b \neq 0$; $2a \neq 4b$; $a \neq 2b$

Bloco 4

$2(ax + 1) = 4(bx + 2)$	$3(ay + 2) - 3(by - 2) = 15$	$m(2x - 1) = n(x - 2)$
$2ax + 2 = 4bx + 8$	$3ay + 6 - 3by + 6 = 15$	$2mx - m = nx - 2n$
$2ax - 4bx = 8 - 2$	$3ay - 3by = 15 - 6 - 6$	$2mx - nx = m - 2n$
$(2a - 4b)x = 6$	$(3a - 3b)y = 3$	$(2m - n)x = m - 2n$
$x = \frac{6}{2a - 4b}$	$y = \frac{3}{3a - 3b}$	$x = \frac{m - 2n}{2m - n}$
$x = \frac{3}{a - 2b}$	$y = \frac{1}{a - b}$	
Condição: $a - 2b \neq 0$; $a \neq 2b$	Condição: $a - b \neq 0$; $a \neq b$	Condição: $2m - n \neq 0$; $2m \neq n$

Bloco 5

$a(x - b) + b = b(x - a) + a$ $ax - ab + b = bx - ab + a$ $ax - bx = -ab + a + ab - b$ $(a - b)x = a - b$ $x = \frac{a - b}{a - b}$ $x = 1$ Condição: $a - b \neq 0$ $a \neq b$	$a(y - 2) = b(2 - y)$ $ay - 2a = 2b - by$ $ay + by = 2a + 2b$ $(a + b)y = (a + b)2$ $y = \frac{(a + b)2}{a + b}$ $y = 2$ Condição: $a + b \neq 0$ $a \neq -b$	$m(2x - 1) = n(4x - 2)$ $2mx - m = 4nx - 2n$ $2mx - 4nx = m - 2n$ $(2m - 4n)x = m - 2n$ $x = \frac{m - 2n}{2m - 4n}$ $x = \frac{m - 2n}{(m - 2n) \cdot 2}$ $x = \frac{1}{2}$ Condição: $m - 2n \neq 0$ $m \neq 2n$

Bloco 6

$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = \frac{a}{b}$ $a \neq 0$ $b \neq 0$ $\frac{bx}{ab} - \frac{ax}{ab} = \frac{a^2}{ab}$ $bx - ax = a^2$ $(b - a)x = a^2$ $x = \frac{a^2}{b - a}$ Condição: $b - a \neq 0$ $b \neq a$	$\frac{x - 1}{b} + \frac{x - 2}{a} = -\frac{1}{a}$ $a \neq 0$ $b \neq 0$ $\frac{a(x - 1)}{ab} + \frac{b(x - 2)}{ab} = -\frac{b}{ab}$ $ax - a + bx - 2b = -b$ $ax + bx = -b + a + 2b$ $(a + b)x = a + b$ $x = \frac{a + b}{a + b}$ $x = 1$ Condição: $a + b \neq 0$ $a \neq -b$	$\frac{y + 3}{m} - \frac{y - n}{3} = \frac{n}{3}$ $m \neq 0$ $\frac{3(y + 3)}{3m} - \frac{m(y - n)}{3m} = \frac{mn}{3m}$ $3y + 9 - my + mn = mn$ $3y - my = mn - mn - 9$ $(3 - m)y = -9$ $y = -\frac{9}{3 - m} = \frac{9}{m - 3}$ Condição: $m - 3 \neq 0$ $m \neq 3$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Resolva e indique o conjunto verdade em $U = \mathbb{R}$ das seguintes equações literais:

1) $mx + b = 0$
$V = \{-\frac{b}{m}\}$
Condição: $m \neq 0$

2) $mx - n = 3$
$V = \{\frac{n + 3}{m}\}$
Condição: $m \neq 0$

3) $ay - 4 = b$
$V = \{\frac{b + 4}{a}\}$
Condição: $a \neq 0$

4) $3mx - 2 = mx$
$V = \{\frac{1}{m}\}$
Condição: $m \neq 0$

5) $7ax + 8 = 5ax + 12$
$V = \{\frac{2}{a}\}$
Condição: $a \neq 0$

6) $my + 5 = 8 - y$
$V = \{\frac{3}{m + 1}\}$
Condição: $m + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$

7) $ay + 3 = 4 + y$
$V = \{\frac{1}{a - 1}\}$
Condição: $a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$

8) $nx - a = x$
$V = \{\frac{a}{n - 1}\}$
Condição: $m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$

9) $mx - 2 = nx$
$V = \{\frac{2}{m - n}\}$
Condição: $m - n \neq 0 \Rightarrow m \neq n$

10) $ay - a = by$
$V = \{\frac{a}{a - b}\}$
Condição: $a - b \neq 0 \Rightarrow a \neq b$

11) $3(mx - 1) = 3nx$
$V = \{\frac{1}{m - n}\}$
Condição: $m - n \neq 0 \Rightarrow m \neq n$

12) $2a(x - 3) - 2b(x + 3) = 0$
$V = \{\frac{6}{a - b}\}$
Condição: $a - b \neq 0 \Rightarrow a \neq b$

13) $m(y - 1) = n(1 - y)$
$V = \{1\}$
Condição: $m + n \neq 0 \Rightarrow m \neq -n$

14) $a(x - 3) = 2b(x - 3)$
$V = \{3\}$
Condição: $a - 2b \neq 0 \Rightarrow a \neq 2b$

15) $3ax - b = a - 3bx$
$V = \{\frac{1}{3}\}$
Condição: $a + b \neq 0 \Rightarrow a \neq -b$

16) $2b(x - 2a) = 6ab$

$V = \{ 5a \}$

Condição: $b \neq 0$

17) $2n(5x + m) = 12\,mn$

$V = \{ m \}$

Condição: $n \neq 0$

18) $3(ay - 1) = 1 - ay$

$V = \{ \frac{1}{a} \}$

Condição: $a \neq 0$

19) $\frac{x - 5}{m} + \frac{x - 4}{n} = -\frac{1}{m}$ $\left(\begin{matrix} m \neq 0 \\ n \neq 0 \end{matrix}\right)$

$V = \{ 4 \}$

Condição: $m + n \neq 0 \Rightarrow m \neq -n$

20) $\frac{x - 2}{2} - \frac{x - b}{b} = \frac{1}{2b}$ $(b \neq 0)$

$V = \{ \frac{1}{b - 2} \}$

Condição: $b - 2 \neq 0 \Rightarrow b \neq 2$

21) $\frac{x}{m} - \frac{x - 1}{5m} = \frac{1}{5}$ $(m \neq 0)$

$V = \{ \frac{m - 1}{4} \}$

Condição:

22) $\frac{x - 1}{2a} - \frac{x - 2}{4} = \frac{1}{2}$ $(a \neq 0)$

$V = \{ \frac{2}{2 - a} \}$

Condição: $2 - a \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$

AS EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS

Observe a equação: $\frac{x - 1}{x} + \frac{3}{x - 1} = 5.$

O que esta equação tem de diferente em relação às outras que você já estudou?

Certamente notou que ela apresenta a variável **x** em denominador.

As equações desse tipo são denominadas **equações fracionárias**, e passaremos a estudá-las agora.

Vamos então analisar o quadro.

Equações	**Classificação**
$3(x + 2) - 4 = 5x$ $\frac{3x}{2} - \frac{x + 1}{5} = \frac{3}{4}$	Não apresentam nenhuma outra letra além da variável **x**. São, portanto, **equações numéricas**. Não apresentam a variável **x** em denominador. São, portanto, **equações inteiras**. Logo, são **equações numéricas inteiras**.
$3(x + a) - 2 = 5a$ $\frac{3x}{a} - \frac{x + 1}{b} = \frac{3b}{4a}$	Apresentam outras letras, consideradas constantes, além da variável **x**. São, portanto, **equações literais**. Não apresentam a variável **x** em denominador. São, portanto, **equações inteiras**. Logo, são **equações literais inteiras**.
$\frac{x - 1}{x} - \frac{3x}{x + 1} = \frac{x + 2}{3}$ $\frac{2}{x} - \frac{3}{5x} = \frac{8}{x}$	Não apresentam nenhuma outra letra além da variável **x**. São, portanto, **equações numéricas**. Apresentam a variável em denominador. São, portanto, **equações fracionárias**. Logo, são **equações numéricas fracionárias**.
$\frac{3(ax + 1)}{x} = \frac{x + b}{a + x}$ $\frac{a + 1}{b + x} = \frac{b - x}{a - 1}$	Apresentam outras letras, consideradas constantes, além da variável. São, portanto, **equações literais**. Apresentam a variável **x** em denominador. São, portanto, **equações fracionárias**. Logo, são **equações literais fracionárias**.

Classifique, conforme o quadro apresentado, as seguintes equações:

1) $3x - 1 = x + 5$

Equação *numérica inteira*

2) $3(x - 1) + 4(x + 1) = 2x$

Equação *numérica inteira*

3) $\frac{2x - 3}{2} - \frac{3x + 1}{4} = \frac{3}{8}$

Equação *numérica inteira*

4) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4}$

Equação *numérica inteira*

5) $\frac{3(ax - 1)}{2} - \frac{2(bx + 1)}{3} = \frac{1}{4}$

Equação *literal inteira*

6) $3(x + m) - 2(x - n) = m + 2n$

Equação *literal inteira*

7) $\frac{x}{x + 1} - \frac{2x}{x - 1} = \frac{5}{3}$

Equação *numérica fracionária*

8) $\frac{3x}{2} - \frac{2}{3x} = \frac{5}{2(x + 1)}$

Equação *numérica fracionária*

9) $\frac{5x + 1}{2} - \frac{3x}{4} = 0$

Equação *numérica inteira*

10) $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = ab$

Equação *literal fracionária*

11) $\frac{x + 1}{a} + \frac{2x - 1}{b} = 1$

Equação *literal inteira*

12) $2(ax + 3) + \frac{b}{x} = \frac{2}{3ax}$

Equação *literal fracionária*

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UMA EQUAÇÃO FRACIONÁRIA

Como você já sabe, não se pode dividir um número por zero. Então, numa equação fracionária, a variável não pode assumir valores que anulam o denominador, ou seja, a equação somente tem existência se os valores da variável não anulam nenhum denominador.

Veja:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x - 1} = \frac{3x}{x + 2} + \frac{3}{4}$$

Denominadores diferentes de zero	Condição de existência	
$x \neq 0$ $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$	$x \neq 0$ $x \neq 1$ $x \neq -2$	Isto significa dizer que a variável pode assumir qualquer valor que não seja 0, 1 ou −2.

Estabeleça a condição de existência das seguintes equações:

1) $\frac{x + 1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x - 1}$

Denominadores diferentes de zero	Condição de existência
$x \neq 0$ $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$	$x \neq 0$ $x \neq 1$

2) $\frac{5}{x - 2} - \frac{3}{x + 3} = \frac{6}{x - 2}$

Denominadores diferentes de zero	Condição de existência
$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$	$x \neq 2$ $x \neq -3$

3) $\dfrac{3}{x-3} + \dfrac{2x-1}{x} = \dfrac{5}{6}$

Denominadores diferentes de zero	Condição de existência
$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ $x \neq 0$	$x \neq 3$ $x \neq 0$

4) $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{x+2}{3}$

Denominadores diferentes de zero	Condição de existência
$x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ $x + 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$	$x \neq 0$ $x \neq -4$

COMO SE INDICA O CONJUNTO UNIVERSO DE UMA EQUAÇÃO FRACIONÁRIA?

O conjunto universo de uma equação fracionária pode ser qualquer conjunto de números: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou outro qualquer, com a exclusão dos valores da variável que anulam os denominadores.

Veja:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = \frac{x+1}{x-2}$$

Condição de existência

$x \neq 0$

$x - 2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 2$

Então, o conjunto universo pode ser:

$U = \mathbb{N} - \{0, 2\}$

$U = \mathbb{Z} - \{0, 2\}$

$U = \mathbb{Q} - \{0, 2\}$

$U = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

Complete o conjunto universo das equações:

1) $\dfrac{1}{x} + 2 = \dfrac{1}{3}$ — $U = \mathbb{Q} - \{0\} = \mathbb{Q}^*$

2) $\dfrac{x+1}{5} - 1 = \dfrac{2}{x}$ — $U = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

3) $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{3}{x-1}$ — $U = \mathbb{R} - \{1\}$

4) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = 2$ — $U = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

5) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-1}{3x}$ — $U = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

6) $\dfrac{2x}{x-3} = \dfrac{x+1}{x}$ — $U = \mathbb{R} - \{0, 3\}$

7) $\dfrac{2}{x+4} - \dfrac{x}{x-4} = \dfrac{1}{5}$ — $U = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

8) $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x+1}{x+2}$ — $U = \mathbb{Q} - \{-2\}$

9) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{3}{x+5} = 1$ — $U = \mathbb{R} - \{-5, 3\}$

COMO SE OBTÉM O CONJUNTO VERDADE DE UMA EQUAÇÃO FRACIONÁRIA?

Para obter o conjunto verdade de uma equação fracionária, devemos resolver a equação, utilizando os princípios de resolução que já conhecemos.

Veja um exemplo:

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{1}{2}$$

Condição de existência

$x \neq 0$

$2x \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$

Conjunto universo

$U = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

m.m.c. dos denominadores

m.m.c. $(x, 2x, 2) = 2x$

Resolução

$\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{2x} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{2 \cdot 2 - 3}{2x} = \dfrac{x}{2x}$

$4 - 3 = x$

$-x = -4 + 3$

$-x = -1 \quad (-1)$

$x = 1$

Verificação

$\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{2x} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{2}{1} - \dfrac{3}{2 \cdot 1} = \dfrac{1}{2}$

$2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \quad (V)$

Logo: $V = \{1\}$

Resolva estas questões:

1) $\frac{6}{x} + \frac{4}{2x} = \frac{8}{3}$

Condição de existência

$x \neq 0$

$2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

Conjunto universo

$U = \mathbb{R} - \{0\}$

m.m.c. dos denominadores

m.m.c. $(x, 2x, 3) = 6x$

Resolução

$\frac{6}{x} + \frac{4}{2x} = \frac{8}{3}$

$\frac{6 \cdot 6 + 4 \cdot 3}{6x} = \frac{16x}{6x}$

$36 + 12 = 16x$

$-16x = -36 - 12$

$-16x = -48 \quad (-1)$

$16x = 48$

$x = 3$

Verificação

$\frac{6}{x} + \frac{4}{2x} = \frac{8}{3}$

$\frac{6}{3} + \frac{4}{2 \cdot 3} = \frac{8}{3}$

$2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

$\frac{8}{3} = \frac{8}{3}$ (V)

Logo: $V = \{3\}$

2) $\frac{x+2}{2x} - \frac{3}{8} = \frac{1}{x}$

Condição de existência

$2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$x \neq 0$

Conjunto universo

$U = \mathbb{R} - \{0\}$

m.m.c. dos denominadores

m.m.c. $(2x, 8, x) = 8x$

Resolução

$\frac{x+2}{2x} - \frac{3}{8} = \frac{1}{x}$

$\frac{4(x+2) - 3x}{8x} = \frac{8}{8x}$

$4x + 8 - 3x = 8$

$4x - 3x = 8 - 8$

$x = 0$

Verificação

$\frac{x+2}{2x} - \frac{3}{8} = \frac{1}{x}$

$\frac{0+2}{2 \cdot 0} - \frac{3}{8} = \frac{1}{0}$ (?)

Logo: $V = \{\ \}$

Veja um outro exemplo:

$\frac{3}{x+1} = 2$

Condição de existência

$x + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1$

Conjunto universo

$U = \mathbb{R} - \{-1\}$

m.m.c. dos denominadores

m.m.c. $(x + 1) = x + 1$

Resolução

$\frac{3}{x+1} = 2$

$\frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1}$

$3 = 2x + 2$

$-2x = -3 + 2$

$-2x = -1 \quad (-1)$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

Verificação

$\frac{3}{x+1} = 2$

$\frac{3}{\frac{1}{2} + 1} = 2$

$\frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$

$3 \cdot \frac{2}{3} = 2$

$2 = 2$ (V)

Logo: $V = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

3) $\frac{x+1}{x-1} + 2 = \frac{2}{x-1}$

Condição de existência

$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Conjunto universo

$U = \mathbb{R} - \{1\}$

m.m.c. dos denominadores

m.m.c. $(x - 1) = x - 1$

Resolução

$\frac{x+1}{x-1} + 2 = \frac{2}{x-1}$

$\frac{x+1+2(x-1)}{x-1} = \frac{2}{x-1}$

$x + 1 + 2x - 2 = 2$

$x + 2x = 2 - 1 + 2$

$3x = 3$

$x = 1$

Verificação

$\frac{x+1}{x-1} + 2 = \frac{2}{x-1}$

$\frac{1+1}{1-1} + 2 = \frac{2}{1-1}$

$\frac{2}{0} + 2 = \frac{2}{0}$ (?)

Logo: $V = \{\ \}$

Observe mais este exemplo:

$$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{3}=1$$

Condição de existência

$x-3\neq 0 \Longrightarrow x\neq 3$

Conjunto universo

$U=\mathbb{R}-\{3\}$

m.m.c. dos denominadores

m.m.c. $(x-3, 3) = 3(x-3)$

Resolução

$$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{3}=1$$

$$\frac{3+2(x-3)}{3(x-3)}=\frac{3(x-3)}{3(x-3)}$$

$3+2x-6=3x-9$

$2x-3x=-9-3+6$

$-x=-6 \quad (-1)$

$x=6$

Verificação

$$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{3}=1$$

$$\frac{1}{6-3}+\frac{2}{3}=1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

$1=1 \quad$ (V)

Logo: $V=\{6\}$

4) $\frac{2}{x+2}+\frac{3}{5}=\frac{x}{x+2}$

Condição de existência

Conjunto universo

$U=\mathbb{R}-\{-2\}$

m.m.c. dos denominadores

m.m.c. $(x+2, 5) = 5(x+2)$

Resolução

$$\frac{2}{x+2}+\frac{3}{5}=\frac{x}{x+2}$$

$$\frac{2\cdot 5+3(x+2)}{5(x+2)}=\frac{5x}{5(x+2)}$$

$10+3x+6=5x$

$3x-5x=-10-6$

$-2x=-16 \ (-1)$

$2x=16$

$x=\frac{16}{2}$

$x=8$

Verificação

$$\frac{2}{x+2}+\frac{3}{5}=\frac{x}{x+2}$$

$$\frac{2}{8+2}+\frac{3}{5}=\frac{8}{8+2}$$

$$\frac{2}{10}+\frac{3}{5}=\frac{8}{10}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$$

$\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$ (V)

Logo: $V=\{8\}$

Observe este outro exemplo:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}=\frac{4}{x}$$

Condição de existência

$x\neq 0$

$x-1\neq 0 \Longrightarrow x\neq 1$

Conjunto universo

$U=\mathbb{R}-\{0, 1\}$

m.m.c. dos denominadores

m.m.c. $(x-1, x) = x(x-1)$

Resolução

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}=\frac{4}{x}$$

$$\frac{1(x-1)+2x}{x(x-1)}=\frac{4(x-1)}{x(x-1)}$$

$x-1+2x=4x-4$

$x+2x-4x=-4+1$

$-x=-3 \quad (-1)$

$x=3$

Verificação

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}=\frac{4}{x}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3-1}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{2}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

$\frac{4}{3}=\frac{4}{3} \quad$ (V)

Logo: $V=\{3\}$

5) $\frac{5}{x+1}+\frac{2}{x}=\frac{6}{x+1}$

Condição de existência

$x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$

$x\neq 0$

Conjunto universo

$U=\mathbb{R}-\{-1, 0\}$

m.m.c. dos denominadores

m.m.c. $(x+1, x) = x(x+1)$

Resolução

$$\frac{5}{x+1}+\frac{2}{x}=\frac{6}{x+1}$$

$$\frac{5x+2(x+1)}{x(x+1)}=\frac{6x}{x(x+1)}$$

$5x+2x+2=6x$

$5x+2x-6x=-2$

$x=-2$

Verificação

$$\frac{5}{x+1}+\frac{2}{x}=\frac{6}{x+1}$$

$$\frac{5}{-2+1}+\frac{2}{-2}=\frac{6}{-2+1}$$

$\frac{5}{-1}-1=\frac{6}{-1}$

$-5-1=-6$

$-6=-6$ (V)

Logo: $V=\{-2\}$

a) Classifique as equações em numérica ou literal, inteira ou fracionária:

1) $2(x - 1) = 0$

Equação numérica inteira.

2) $2(ax - 1) = 0$

Equação literal inteira.

3) $\frac{x+1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{x}{2}$

Equação numérica inteira.

4) $\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{3}$

Equação numérica fracionária.

5) $\frac{ax-1}{x} = \frac{bx+1}{2}$

Equação literal fracionária.

6) $\frac{x-3}{2x} - \frac{1}{5} = \frac{x+3}{x}$

Equação numérica fracionária.

7) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{5}{x-1}$

Equação numérica fracionária

8) $\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{3} = \frac{x}{5}$

Equação numérica inteira.

9) $5(ax + 1) - 3(bx - 1) = 0$

Equação literal inteira

10) $\frac{x-5}{x} = \frac{x}{x-3}$

Equação numérica fracionária.

b) Complete a indicação do conjunto universo e dê o conjunto verdade das equações fracionárias:

1) $\frac{2}{5} - \frac{3}{x} = \frac{1}{10}$

$U = \mathbb{R} - \{0\}$

$V = \{10\}$

2) $\frac{5}{2x} - \frac{1}{2} = 1$

$U = \mathbb{R} - \{0\}$

$V = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

3) $\frac{1}{4} - \frac{3}{x} = \frac{1}{2x}$

$U = \mathbb{R} - \{0\}$

$V = \{14\}$

4) $\frac{6}{5x} + \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

$U = \mathbb{R} - \{0\}$

$V = \{-3\}$

5) $\frac{5}{3x} + \frac{1}{6} = \frac{7}{4x}$

$U = \mathbb{R} - \{0\}$

$V = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

6) $\frac{3}{x-6} = 3$

$U = \mathbb{R} - \{6\}$

$V = \{7\}$

7) $\frac{3x}{x+4} + \frac{1}{2} = \frac{4x-1}{x+4}$

$U = \mathbb{R} - \{-4\}$

$V = \{6\}$

8) $\frac{10}{3x-1} = 2$

$U = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$V = \{2\}$

9) $\frac{4x+1}{x+1} = 3$

$U = \mathbb{R} - \{-1\}$

$V = \{2\}$

10) $\frac{3}{x-3} + \frac{x+3}{2} = \frac{x-3}{2}$

$U = \mathbb{R} - \{3\}$

$V = \{2\}$

11) $\frac{4}{x+2} + \frac{x+2}{3} = \frac{x-2}{3}$

$U = \mathbb{R} - \{-2\}$

$V = \{-5\}$

12) $\frac{2}{x-3} = \frac{1}{3}$

$U = \mathbb{R} - \{3\}$

$V = \{9\}$

13) $\frac{3(x-3)}{2x+3} = 1$

$U = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

$V = \{12\}$

14) $\frac{2}{x} = \frac{4}{x+1}$

$U = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

$V = \{1\}$

15) $\frac{2x}{x-1} = \frac{2x+3}{x+1}$

$U = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$V = \{-3\}$

16) $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{4}{x-3} = 0$

$U = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

$V = \{-17\}$

17) $\dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{3x-1}{6x}$

$U = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$

$V = \{1\}$

18) $\dfrac{3(x-2)}{x+1} = 2$

$U = \mathbb{R} - \{-1\}$

$V = \{8\}$

19) $\dfrac{4(x-3)}{2x+2} - 1 = 0$

$U = \mathbb{R} - \{-1\}$

$V = \{7\}$

20) $\dfrac{3}{x} = 4 - \dfrac{4x}{x-2}$

$U = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

$V = \left\{\frac{6}{11}\right\}$

21) $\dfrac{3x-1}{3x} = \dfrac{1}{2}$

$U = \mathbb{R} - \{0\}$

$V = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

22) $\dfrac{x^2}{x-7} - \dfrac{2x+1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$U = \mathbb{R} - \{7\}$

$V = \left\{-\frac{7}{6}\right\}$

23) $\dfrac{3x-2}{4x} = \dfrac{4}{5}$

$U = \mathbb{R} - \{0\}$

$V = \{-10\}$

24) $\dfrac{3x+4}{2x} - \dfrac{5}{4} = 0$

$U = \mathbb{R} - \{0\}$

$V = \{-8\}$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Resolva as equações em $U = \mathbb{R}$ e dê as respostas usando os quantificadores e indicando se é ou não uma identidade:

1) $3x - 2(x+1) = x - 2$

$\forall x, \ 3x - 2(x+1) = x - 2$ (Identidade)

2) $5x - 3(x-1) = 2(x-3)$

$\nexists x \mid 5x - 3(x-1) = 2(x-3)$ (Não é identidade)

3) $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{5}{6}$

$\exists x \mid \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{5}{6}$ (Não é identidade)

4) $\dfrac{3(2x-1)}{4} = \dfrac{2(3x+1)}{3}$

$\exists x \mid \dfrac{3(2x-1)}{4} = \dfrac{2(3x+1)}{3}$ (Não é identidade)

5) $\dfrac{3(x-1)}{2} + \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{7(x-1)}{4} - \dfrac{1}{2}$

$\forall x, \ \dfrac{3(x-1)}{2} + \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{7(x-1)}{4} - \dfrac{1}{2}$ (Identidade)

b) Prove, através de transformações, que estas equações são identidades:

1) $5(x+3) - 2(2x+8) = x - 1$
2) $(x+4)(x+3) - 2 = (x+2)(x+5)$
3) $(x-7)(x-1) + 2(x+1) = (x-3)^2$
4) $(2x+1)(x-1) = (x+2)(2x+3) - 7(x+1) - x$
5) $(x-6)(x-5) = (x-3)(x-10) + 2x$
6) $(2x-1)(3x+1) = (6x+1)(x-2) + 10x + 1$
7) $(m^2-1)(m^2+2) + 2 = m^2(m^2+1)$
8) $(x+1)(2x^2-3x+2) = x^2(2x-1) - (x-2)$
9) $(y-8)(y^2-1) = y^2(y-8) - (y-8)$
10) $(2x-3)^2 = (3x-2)^2 - 5(x+1)(x-1)$

c) Dê o conjunto verdade, em $U = \mathbb{R}$, das seguintes equações literais:

1) $3ax + b = 0$ $\left\{-\frac{b}{3a}\right\}$ $a \neq 0$
2) $2ax - b = 1$ $\left\{\frac{b+1}{2a}\right\}$ $a \neq 0$
3) $a(x+2) = 0$ $\{-2\}$ $a \neq 0$
4) $x(m+n) = m(x-n)$ $\{-m\}$ $m \neq 0$
5) $b(x+a) = 2ab$ $\{a\}$ $b \neq 0$
6) $2ax - x(a+1) = 3a$ $\left\{\frac{3a}{a-1}\right\}$ $a \neq 1$
7) $2mx - m(x+1) = 0$ $\{1\}$ $m \neq 0$
8) $ax + 2am = a(m-x)$ $\left\{-\frac{m}{2}\right\}$ $a \neq 0$

d) Utilizando o conjunto $\mathbb{R}$, indique o conjunto universo e dê o conjunto verdade das seguintes equações fracionárias:

1) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{3x+1}{x}$

$U = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$V = \{\ \}$

2) $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{x-3} = 0$

$U = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

$V = \{-3\}$

3) $\frac{x}{x+1} + \frac{3}{x+2} = 1$ $U = \mathbb{R} - \{-2, -1\}$ $V = \{-\frac{1}{2}\}$

4) $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x+2}{x-3}$ $U = \mathbb{R} - \{2, 3\}$ $V = \{\frac{1}{2}\}$

5) $\frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{2x^2}{(x+1)(x+2)}$ $U = \mathbb{R} - \{-2, -1\}$ $V = \{\frac{1}{2}\}$

6) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2x} = \frac{1}{4}$ $U = \mathbb{R} - \{0\}$ $V = \{2\}$

7) $\frac{x}{x+1} = \frac{x-3}{x}$ $U = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ $V = \{-\frac{3}{2}\}$

8) $\frac{2x^2}{x+2} = \frac{4x-1}{2}$ $U = \mathbb{R} - \{-2\}$ $V = \{\frac{2}{7}\}$

9) $\frac{x}{x-4} + \frac{4}{x-1} = 1$ $U = \mathbb{R} - \{1, 4\}$ $V = \{\frac{5}{2}\}$

10) $\frac{5}{x-6} = \frac{2}{x-3}$ $U = \mathbb{R} - \{3, 6\}$ $V = \{1\}$

e) Resolva as questões:

1) Descubra o valor de **x** que torna a expressão $\frac{x-2}{3} + 2x$ equivalente a 18. (8)

2) Determine o valor de **x** para que a expressão $\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3}$ se torne equivalente a 3. (5)

3) Ache o valor de **x** que torna a expressão $\frac{x+2}{2} + \frac{x}{2}$ equivalente à expressão $\frac{x-4}{2} + x$. (6)

4) Thomas Alva Edison, o homem que pôs a eletricidade a serviço da humanidade, nasceu nos Estados Unidos no século XIX.

O ano do nascimento de Thomas Edison é representado por um numeral em que:

- o algarismo das unidades é dado pela raiz da equação $2(x-3) = 8$;
- o algarismo das dezenas é dado pela raiz da equação $\frac{x+5}{3} - 1 = \frac{x+4}{4}$.

Sabendo que Edison viveu 84 anos, descubra em que ano ele nasceu e em que ano morreu.

(1847 e 1931.)

5) Descubra o termo que deve ser colocado no ☐ para completar a identidade:

$(2m^2 - 7n^3)^2 = 4m^4 -$ [$28m^2n^3$] $+ 49n^6$

6) Descubra os termos que devem ser escritos nos ☐ para se obter uma identidade:

([$2m^2$] $+ 3y)^2 = 4m^4 +$ [$12m^2y$] $+ 9y^2$

7) Descubra o termo que deve ser colocado no ☐ para completar a identidade:

$(3x^4 - 5y^3)^2 =$ [$9x^8$] $- 30x^4y^3 + 25y^6$

8) Descubra os termos que devem ser escritos nos ☐ para se obter uma identidade:

$(7x^5 +$ [$4y^7$] $)^2 = 49x^{10} +$ [$56x^5y^7$] $+ 16y^{14}$

SISTEMA DE EQUAÇÕES

NOÇÃO DE SISTEMA

A noção de sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau já foi dada em estudos anteriores. Mesmo assim, vamos recordá-la aqui.

Sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis é toda sentença aberta e composta, constituída por duas equações do primeiro grau com duas variáveis.

Exemplos: $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - y = 0 \\ \dfrac{3x}{2} - \dfrac{2y}{3} = 7 \end{cases}$

A SOLUÇÃO DE UM SISTEMA

Admitindo que as variáveis das equações sejam **x** e **y**, a solução do sistema é dada por um par ordenado (x, y). Os valores das variáveis devem tornar verdadeiras as duas igualdades.

Exemplo:

Sistema	Conjunto universo	Solução	Conjunto verdade	Verificação
$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$	$U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$(2, -3)$	$V = \{(2, -3)\}$	$(2, -3)$ → $x = 2$, $y = -3$ 1.ª equação: $3x + y = 3$ $3(2) + (-3) = 3$ $6 - 3 = 3$ $3 = 3$ (V) 2.ª equação: $x - 2y = 8$ $(2) - 2(-3) = 8$ $2 + 6 = 8$ $8 = 8$ (V)

Verifique se os pares ordenados constituem solução dos sistemas ($U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$):

1) $(3, -4)$ $\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 3x - y = 13 \end{cases}$

Verificação:

$5x + 2y = 7$
$5(3) + 2(-4) = 7$
$15 - 8 = 7$
$7 = 7$ (V)

$3x - y = 13$
$3(3) - (-4) = 13$
$9 + 4 = 13$
$13 = 13$ (V)

Logo: $(3, -4)$ é solução.

2) $(1, -5)$ $\begin{cases} 2x - 3y = 17 \\ 5x + y = 0 \end{cases}$

Verificação:

$2x - 3y = 17$
$2(1) - 3(-5) = 17$
$2 + 15 = 17$
$17 = 17$ (V)

$5x + y = 0$
$5(1) + (-5) = 0$
$5 - 5 = 0$
$0 = 0$ (V)

Logo: $(1, -5)$ é solução.

3) $\left(-3, \frac{1}{2}\right)\begin{cases} x + 6y = 0 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$

Verificação:

$x + 6y = 0$ $\quad$ $3x - 2y = 10$

$(-3) + 6\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ $\quad$ $3(-3) - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 10$

$-3 + 3 = 0$ $\quad$ $-9 - 1 = 10$

$0 = 0$ (V) $\quad$ $-10 = 10$ (F)

Logo: $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ não é solução.

4) $(8, -4)\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{3x}{8} + \frac{y}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}$

Verificação:

$\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 4$ $\quad$ $\frac{3x}{8} + \frac{y}{3} = \frac{5}{3}$

$\frac{8}{4} - \frac{(-4)}{2} = 4$ $\quad$ $\frac{3(8)}{8} + \frac{(-4)}{3} = \frac{5}{3}$

$2 + 2 = 4$ $\quad$ $3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$

$4 = 4$ (V) $\quad$ $\frac{9}{3} - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$

$\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$ (V)

Logo: (8, −4) é solução.

COMO DESCOBRIR O PAR ORDENADO QUE CONSTITUI A SOLUÇÃO DE UM SISTEMA?

Para isso deve-se resolver o sistema aplicando um método de resolução. Dentre os métodos de resolução existentes, vamos recordar o método da substituição e o método da adição.

Método da substituição — Seja encontrar a solução, em U = IR × IR, do sistema: $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$

Sistema	1.º passo	2.º passo	3.º passo
$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$	Isolar qualquer variável de uma das equações.	Substituir na outra equação o valor da variável isolada.	Substituir em qualquer das equações o valor obtido.
	$2x + y = -3$ $y = -3 - 2x$	$x + 3y = 11$ $x + 3(-3 - 2x) = 11$ $x - 9 - 6x = 11$ $x - 6x = 11 + 9$ $-5x = 20 \quad (-1)$ $5x = -20$ $\boxed{x = -4}$	$2x + y = -3$ $2(-4) + y = -3$ $-8 + y = -3$ $y = -3 + 8$ $\boxed{y = 5}$ ou $x + 3y = 11$ $(-4) + 3y = 11$ $3y = 11 + 4$ $3y = 15$ $\boxed{y = 5}$ Então: $x = -4$ $y = 5$ ou $(-4, 5)$ ou $V = \{(-4, 5)\}$

Agora, usando o método da substituição, vamos resolver, em U = IR X IR, os seguintes sistemas:

1) $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

Resolução:

$2x + y = -3$
$y = -3 - 2x$

$x + 3y = 1$
$x + 3(-3 - 2x) = 1$
$x - 9 - 6x = 1$
$x - 6x = 1 + 9$
$-5x = 10 \; (-1)$
$5x = -10$
$x = -2$

$2x + y = -3$
$2(-2) + y = -3$
$-4 + y = -3$
$y = -3 + 4$
$y = 1$

Solução: (−2 , 1) $\quad$ V = { (−2 , 1) }

2) $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ x - 3y = -9 \end{cases}$

Resolução:

$x - 3y = -9$
$x = -9 + 3y$

$3x + 2y = -5$
$3(-9 + 3y) + 2y = -5$
$-27 + 9y + 2y = -5$
$9y + 2y = -5 + 27$
$11y = 22$
$y = 2$

$x - 3y = -9$
$x - 3(2) = -9$
$x - 6 = -9$
$x = -9 + 6$
$x = -3$

Solução: (-3 , 2) V = {(-3 , 2)}

3) $\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

Resolução:

$3x - 2y = 13$ (1.ª equação)

$3x = 13 + 2y$

$x = \frac{13 + 2y}{3}$

$2x + 3y = 13$ (2.ª equação)

$2 \cdot \left(\frac{13 + 2y}{3}\right) + 3y = 13$

$\frac{26 + 4y}{3} + 3y = 13$

$\frac{26 + 4y + 9y}{3} = \frac{39}{3}$

$26 + 4y + 9y = 39$
$4y + 9y = 39 - 26$
$13y = 13$
$y = 1$

$3x - 2y = 13$
$3x - 2(1) = 13$
$3x - 2 = 13$
$3x = 13 + 2$
$3x = 15$
$x = 5$

Solução: (5, 1)

V = {(5, 1)}

4) $\begin{cases} 2x - 5y = 26 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

Resolução:

$2x - 5y = 26$
$2x = 26 + 5y$
$x = \frac{26 + 5y}{2}$

$3x + 2y = 1$
$3\left(\frac{26 + 5y}{2}\right) + 2y = 1$
$\frac{78 + 15y}{2} + 2y = 1$
$\frac{78 + 15y + 4y}{2} = \frac{2}{2}$
$78 + 15y + 4y = 2$
$15y + 4y = 2 - 78$
$19y = -76$
$y = -4$

$2x - 5y = 26$
$2x - 5(-4) = 26$
$2x + 20 = 26$
$2x = 26 - 20$
$2x = 6$
$x = 3$

Solução: (3 , -4) V = {(3 , -4)}

5) $\begin{cases} 5x + 4y = 15 \\ 4x - 3y = 12 \end{cases}$

Resolução:

$5x + 4y = 15$
$5x = 15 - 4y$
$x = \frac{15 - 4y}{5}$

$4x - 3y = 12$
$4\left(\frac{15 - 4y}{5}\right) - 3y = 12$
$\frac{60 - 16y}{5} - 3y = 12$
$\frac{60 - 16y - 15y}{5} = \frac{60}{5}$
$60 - 16y - 15y = 60$
$-16y - 15y = 60 - 60$
$-31y = 0$
$y = 0$

$5x + 4y = 15$
$5x + 4(0) = 15$
$5x + 0 = 15$
$x = 3$

Solução: (3 , 0) V = {(3 , 0)}

Método da adição — Seja encontrar a solução, em $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, do sistema: $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

1.º passo	2.º passo
Adicionar as duas equações, de modo que uma das variáveis seja eliminada.	Substituir, em qualquer das equações, o valor encontrado.
$3x + y = 7$ $2x - y = -2$ (+) $3x + 2x + \cancel{y} - \cancel{y} = 7 - 2$ $5x = 5$ $\boxed{x = 1}$	$3x + y = 7$ $3(1) + y = 7$ $3 + y = 7$ $y = 7 - 3$ $\boxed{y = 4}$ ou $2x - y = -2$ $2(1) - y = -2$ $2 - y = -2$ $-y = -2 - 2$ $-y = -4 \quad (-1)$ $\boxed{y = 4}$

Solução: (1, 4) $\quad V = \{(1, 4)\}$

Vamos resolver alguns sistemas pelo método da adição (U = IR X IR):

1) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = -8 \end{cases}$

Resolução:

$$x + y = 2$$
$$2x - y = -8 \quad (+)$$
$$x + 2x + \cancel{y} - \cancel{y} = 2 - 8$$
$$3x = -6$$
$$x = -2$$

$$x + y = 2$$
$$(-2) + y = 2$$
$$y = 2 + 2$$
$$y = 4$$

Solução: (-2, 4) $\quad V = \{(-2, 4)\}$

2) $\begin{cases} 4x + y = -13 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$

Resolução:

$$4x + y = -13$$
$$2x - y = -5 \quad (+)$$
$$4x + 2x + y - y = -13 - 5$$
$$6x = -18$$
$$x = -3$$

$$4x + y = -13$$
$$4(-3) + y = -13$$
$$-12 + y = -13$$
$$y = -13 + 12$$
$$y = -1$$

Solução: (-3, -1) $\quad V = \{(-3, -1)\}$

3) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 6x - y = 3 \end{cases}$

Resolução:

$$3x + y = 0$$
$$6x - y = 3 \quad (+)$$
$$3x + 6x + y - y = 0 + 3$$
$$9x = 3$$
$$x = \frac{3}{9}$$
$$x = \frac{1}{3}$$

$$3x + y = 0$$
$$3\left(\frac{1}{3}\right) + y = 0$$
$$1 + y = 0$$
$$y = -1$$

Solução: $\left(\frac{1}{3}, -1\right)$ $\quad V = \left\{\left(\frac{1}{3}, -1\right)\right\}$

4) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$

Resolução:

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 5 \\ 5x - 2y = 3 \\ \hline (+) \\ 3x + 5x + \cancel{2y} - \cancel{2y} = 5 + 3 \\ 8x = 8 \\ x = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x + 2y = 5 \\ 3(1) + 2y = 5 \\ 3 + 2y = 5 \\ 2y = 5 - 3 \\ 2y = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

Solução: (1, 1) V = {(1, 1)}

5) $\begin{cases} 6x + 3y = -27 \\ 2x - 3y = -21 \end{cases}$

Resolução:

$$\begin{array}{r} 6x + 3y = -27 \\ 2x - 3y = -21 \\ \hline (+) \\ 6x + 2x + 3y - 3y = -27 - 21 \\ 8x = -48 \\ x = -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6x + 3y = -27 \\ 6(-6) + 3y = -27 \\ -36 + 3y = -27 \\ 3y = -27 + 36 \\ 3y = 9 \\ y = 3 \end{array}$$

Solução: (-6, 3) V = {(-6, 3)}

6) $\begin{cases} 7a + 8b = 10 \\ 3a - 8b = 10 \end{cases}$

Resolução:

$$\begin{array}{r} 7a + 8b = 10 \\ 3a - 8b = 10 \\ \hline (+) \\ 7a + 3a + 8b - 8b = 10 + 10 \\ 10a = 20 \\ a = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7a + 8b = 10 \\ 7(2) + 8b = 10 \\ 14 + 8b = 10 \\ 8b = 10 - 14 \\ 8b = -4 \\ b = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Solução: $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ V = $\left\{\left(2, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

Você deve ter notado que, nos sistemas resolvidos pelo método da adição, uma das variáveis aparecia nas duas equações com coeficientes simétricos, fato este que possibilitou a sua eliminação ao se efetuar a adição.

$\begin{cases} x \boxed{+ 2}y = 4 \\ x \boxed{- 2}y = 0 \end{cases}$

coeficientes simétricos: possibilitam a eliminação

$$\begin{array}{r} x + \cancel{2y} = 4 \\ x - \cancel{2y} = 0 \\ \hline (+) \\ x + x = 4 + 0 \\ 2x = 4 \\ \boxed{x = 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ (2) + 2y = 4 \\ 2y = 4 - 2 \\ 2y = 2 \\ \boxed{y = 1} \end{array}$$

Agora você poderá perguntar: e se os coeficientes não forem simétricos?

Neste caso, você resolverá o sistema pelo método da substituição ou, então, utilizará um pequeno artifício.

Observe:

Os coeficientes são iguais — Neste caso você multiplica uma das equações por −1.

$\begin{cases} x \boxed{+ 2}y = 9 \\ 3x \boxed{+ 2}y = 15 \end{cases}$ (−1) →

coeficientes iguais

$$\begin{array}{r} -x - \cancel{2y} = -9 \\ 3x + \cancel{2y} = 15 \\ \hline (+) \\ -x + 3x = -9 + 15 \\ 2x = 6 \\ \boxed{x = 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = 9 \\ (3) + 2y = 9 \\ 3 + 2y = 9 \\ 2y = 9 - 3 \\ 2y = 6 \\ \boxed{y = 3} \end{array}$$

Solução: (3, 3)
V = {(3, 3)}

Resolva, pelo método da adição:

1) $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$ (−1)

$-x - 3y = -10$
$2x + 3y = 14$ (+)
$-x + 2x = -10 + 14$
$x = 4$

$x + 3y = 10$
$4 + 3y = 10$
$3y = 10 - 4$
$3y = 6$
$y = 2$

Solução: (4, 2) V = {(4, 2)}

2) $\begin{cases} 2m - 3n = -25 \\ m - 3n = -23 \end{cases}$ (−1)

$-2m + 3n = 25$
$m - 3n = -23$ (+)
$-2m + m = 25 - 23$
$-m = 2$ (−1)
$m = -2$

$2m - 3n = -25$
$2(-2) - 3n = -25$
$-4 - 3n = -25$
$-3n = -25 + 4$
$-3n = -21$ (−1)
$3n = 21$
$n = 7$

Solução: (−2, 7) V = {(−2, 7)}

3) $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$ (−1)

$-2x - 3y = -16$
$2x - 2y = 6$ (+)
$-3y - 2y = -16 + 6$
$-5y = -10$ (−1)
$5y = 10$
$y = 2$

$2x + 3y = 16$
$2x + 3(2) = 16$
$2x + 6 = 16$
$2x = 16 - 6$
$2x = 10$
$x = 5$

Solução: (5, 2) V = {(5, 2)}

Os coeficientes não são iguais — Analise o exemplo e perceberá o que deve fazer:

$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \quad (3) \\ 4x - 3y = -1 \quad (2) \end{cases}$

$9x + 6y = 36$
$8x - 6y = -2$ (+)
$17x = 34$
$\boxed{x = 2}$

$3x + 2y = 12$
$3(2) + 2y = 12$
$6 + 2y = 12$
$2y = 6$
$\boxed{y = 3}$

Solução: (2, 3)

Ou então:

$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \quad (-4) \\ 4x - 3y = -1 \quad (3) \end{cases}$

$-12x - 8y = -48$
$12x - 9y = -3$ (+)
$-17y = -51$
$17y = 51$
$\boxed{y = 3}$

$3x + 2y = 12$
$3x + 2(3) = 12$
$3x + 6 = 12$
$3x = 12 - 6$
$3x = 6$
$\boxed{x = 2}$

Solução: (2, 3)

Agora resolva:

1) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$

Solução: $(-3, -1)$ $\qquad V = \{(-3, -1)\}$

2) $\begin{cases} 3x + 3y = -4 \\ x + 6y = 2 \end{cases}$

Solução: $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$ $\qquad V = \left\{\left(-2, \frac{2}{3}\right)\right\}$

3) $\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ 4x + 15y = 11 \end{cases}$

Solução: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$ $\qquad V = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)\right\}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Resolva, em $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, os sistemas, utilizando o método da substituição ou da adição:

1) $\begin{cases} x + y = -3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$
Solução: $(-1, -2)$

2) $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$
Solução: $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

3) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - 2y = -27 \end{cases}$
Solução: $(-5, 6)$

4) $\begin{cases} 4x - y = -2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$
Solução: $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$

5) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - 9y = 3 \end{cases}$
Solução: $\left(3, \frac{1}{3}\right)$

6) $\begin{cases} 4x - 2y = -1 \\ 8x + 2y = 4 \end{cases}$
Solução: $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$

7) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 5x - y = -8 \end{cases}$
Solução: $(-2, -2)$

8) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 2y = 15 \end{cases}$
Solução: $(3, 3)$

9) $\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$
Solução: $(2, 9)$

10) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 5x + y = 0 \end{cases}$
Solução: $(-2, 10)$

11) $\begin{cases} 7x - y = -5 \\ 5x + 2y = 29 \end{cases}$
Solução: $(1, 12)$

12) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$
Solução: $(1, 1)$

13) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Solução: (10, 8)

14) $\begin{cases} 5x + 6y = 4 \\ 3x - 6y = 60 \end{cases}$

Solução: (8, −6)

15) $\begin{cases} x + 3y = 18 \\ x + y = 12 \end{cases}$

Solução: (9, 3)

16) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 3y = 33 \end{cases}$

Solução: (6, −9)

17) $\begin{cases} 2m - 5n = -1 \\ m + 4n = 19 \end{cases}$

Solução: (7, 3)

18) $\begin{cases} 6a - b = -2 \\ 3a + 2b = 19 \end{cases}$

Solução: (1, 8)

19) $\begin{cases} 2a - 5b = 15 \\ 3a + 2b = 13 \end{cases}$

Solução: (5, −1)

20) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$

Solução: (−4, 3)

21) $\begin{cases} 5x + 4y = 14 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

Solução: (2, 1)

OS SISTEMAS NÃO-PREPARADOS

Os sistemas que apresentam as equações sem envolver sinais de associação (parênteses, colchetes ou chaves) e sem denominadores, como os que você resolveu até agora, são chamados **sistemas preparados**, ou seja, sistemas em condições de serem resolvidos pela aplicação de um dos métodos de resolução.

Agora observe este sistema: $\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} - 1 = x \\ 3(x - 1) = y - 1 \end{cases}$

Ele não está em condições de ser resolvido por um método de resolução. Por isso, precisa ser preparado.

1.ª equação: $\dfrac{x + y}{2} - 1 = x$

$$\frac{x + y - 2}{\cancel{2}} = \frac{2x}{\cancel{2}} \Longrightarrow x + y - 2 = 2x \Longrightarrow x - 2x + y = 2$$

$$\boxed{-x + y = 2}$$

2.ª equação: $3(x - 1) = y - 1$

$$3x - 3 = y - 1 \Longrightarrow 3x - y = -1 + 3 \Longrightarrow \boxed{3x - y = 2}$$

Logo:

$$\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} - 1 = x \\ 3(x - 1) = y - 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

Não-preparado. Preparado.

Prepare os seguintes sistemas:

1) $\begin{cases} 3(x + 4) = 2y \\ \dfrac{x + y}{3} + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{x}{2} \end{cases}$

1.ª equação

$3(x + 4) = 2y$

$3x + 12 = 2y$

$3x - 2y = -12$

2.ª equação

$\dfrac{x + y}{3} + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{x}{2}$

$\dfrac{2(x + y) + 4}{6} = \dfrac{-3x}{6}$

$2x + 2y + 4 = -3x$

$2x + 2y + 3x = -4$

$5x + 2y = -4$

Sistema preparado

$\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 5x + 2y = -4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{7}{4} \\ 3(x + y) - y = 13 \end{cases}$

1.ª equação

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{7}{4}$

$\dfrac{2x + y}{4} = \dfrac{7}{4}$

$2x + y = 7$

2.ª equação

$3(x + y) - y = 13$

$3x + 3y - y = 13$

$3x + 2y = 13$

Sistema preparado

$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x - y}{4} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3x}{2} - y = 5 \end{cases}$

1.ª equação

$\dfrac{x - y}{4} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{x - y + 2x}{4} = \dfrac{6}{4}$

$x - y + 2x = 6$

$3x - y = 6$

2.ª equação

$\dfrac{3x}{2} - y = 5$

$\dfrac{3x - 2y}{2} = \dfrac{10}{2}$

$3x - 2y = 10$

Sistema preparado

$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$

Uma vez preparado o sistema, você pode encontrar a solução aplicando qualquer método. Veja:

$\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} + 1 = \dfrac{x}{3} \\ 2(x - 5) = y + 6 \end{cases}$

1.ª equação

$\dfrac{x + y}{2} + 1 = \dfrac{x}{3}$

$\dfrac{3(x + y) + 6}{6} = \dfrac{2x}{6}$

$3x + 3y + 6 = 2x$

$3x - 2x + 3y = -6$

$\boxed{x + 3y = -6}$

2.ª equação

$2(x - 5) = y + 6$

$2x - 10 = y + 6$

$2x - y = 6 + 10$

$\boxed{2x - y = 16}$

Sistema preparado

$\begin{cases} x + 3y = -6 \\ 2x - y = 16 \end{cases}$

Agora apliquemos, por exemplo, o método da adição:

$\begin{cases} x + 3y = -6 \xrightarrow{(1)} x + 3y = -6 \\ 2x - y = 16 \xrightarrow{(3)} 6x - 3y = 48 \end{cases}$ (+)

$7x = 42$

$x = 6$

$x + 3y = -6$

$6 + 3y = -6$

$3y = -6 - 6$

$3y = -12$

$y = -4$

Solução: (6, −4)

Vamos resolver alguns sistemas não-preparados:

1) $\begin{cases} x + 2 = \dfrac{y}{2} \\ 3(x - 1) = y - 5 \end{cases}$

Solução: (2 , 8)

2) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{y - 1}{2} \\ 2x - 1 = \dfrac{y}{2} + 2 \end{cases}$

Solução: (3 , 6)

3) $\begin{cases} 5(x + 2) = y - 2 \\ \dfrac{x + 4}{3} + 6 = y \end{cases}$

Solução: (−1 , 7)

4) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{4} - 5 = y \\ \dfrac{x - y}{3} = x - 2 \end{cases}$

Solução: (5 , −4)

5) $\begin{cases} 2(x + 3y) = -3x \\ \dfrac{x - 2}{2} + 2 = -\dfrac{y + 1}{3} \end{cases}$

Solução: (−6 , 5)

6) $\begin{cases} \dfrac{2x + 1}{2} = y \\ 2(2x + 3) - 3(y - 2) = 11 \end{cases}$

Solução: $\left(\dfrac{1}{2} , 1 \right)$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Resolva, em $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, os seguintes sistemas utilizando qualquer método:

1) $\begin{cases} 3x + \dfrac{y}{6} = 16 \\ 4x - \dfrac{y}{3} = 18 \end{cases}$

Solução: (5 , 6)

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 3 \\ \dfrac{x - 1}{3} + y = 2 \end{cases}$

Solução: (4 , 1)

3) $\begin{cases} \dfrac{x + 6}{4} + \dfrac{y + 4}{2} = \dfrac{3}{4} \\ x - y = -2 \end{cases}$

Solução: (-5 , -3)

4) $\begin{cases} \dfrac{x + 5}{4} - \dfrac{2y + 7}{3} = -6 \\ 2x + \dfrac{y + 1}{2} = 2 \end{cases}$

Solução: (-1 , 7)

5) $\begin{cases} \dfrac{3x - 1}{2} = 3y \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

Solução: $\left(\dfrac{2}{3} , \dfrac{1}{6} \right)$

6) $\begin{cases} \dfrac{x + 2}{5} - \dfrac{5y}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x - 1}{2} - y = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

Solução: $\left(3 , \dfrac{1}{5} \right)$

7) $\begin{cases} \dfrac{x + 4}{7} = y + 10 \\ x - y = 18 \end{cases}$

Solução: (10 , -8)

8) $\begin{cases} \dfrac{6x + 7}{3} - \dfrac{5y}{6} = \dfrac{7}{6} \\ \dfrac{x + 5}{4} = -y \end{cases}$

Solução: (-1 , -1)

9) $\begin{cases} 4(x + 3) - 2(y + 1) = -20 \\ 5(2x + 11) + y = 10 \end{cases}$

Solução: (-5 , 5)

10) $\begin{cases} \dfrac{m}{7} + \dfrac{n}{5} = -2 \\ \dfrac{m + n}{4} + 3 = 0 \end{cases}$

Solução: (-7 , -5)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Prove que o par ordenado constitui solução do sistema ($U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$):

1) $(2, -3)$

$\begin{cases} \dfrac{x - y}{5} + \dfrac{y}{3} = x - 2 \\ \dfrac{x + 1}{6} - \dfrac{y + 1}{4} = 1 \end{cases}$

2) $(-1, 2)$

$\begin{cases} 2(x + 5) - 3(2y - 1) = -1 \\ \dfrac{x + 3y}{10} - \dfrac{x}{2} = 1 \end{cases}$

3) $(-2, -5)$

$\begin{cases} \dfrac{3x}{2} + \dfrac{2y}{5} = y \\ 2(x + y) - 7x = 0 \end{cases}$

b) Encontre o par ordenado que constitui a solução, em $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dos sistemas:

1) $\begin{cases} 5 - 2(x + y) = 19 \\ 3 - 5(x - y) = 38 \end{cases}$ $(-7, 0)$

2) $\begin{cases} \dfrac{4x + 1}{2} - \dfrac{y + 1}{4} = \dfrac{3}{2} \\ 8x - y = 5 \end{cases}$ $\left(\dfrac{3}{4}, 1\right)$

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} - 10y = -3 \\ \dfrac{x + 5y}{7} + \dfrac{x - 1}{2} = x - 2 \end{cases}$ $\left(5, \dfrac{2}{5}\right)$

4) $\begin{cases} \dfrac{2(2x - 3)}{3} - 2y = \dfrac{3x - 2}{5} \\ \dfrac{x}{2} = y \end{cases}$ $(-6, -3)$

5) $\begin{cases} \dfrac{y-1}{4} + x = 0 \\ \dfrac{y-3}{2} - \dfrac{x-1}{3} = -2x \end{cases}$ (−2, −9)

6) $\begin{cases} 2(x-4) - \dfrac{y}{3} = x \\ \dfrac{x-y}{6} - \dfrac{2x}{3} = y + 4 \end{cases}$ (6, −6)

c) Testes:

1) O conjunto verdade do sistema $\begin{cases} 5x - 4y = 0 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$ é:

a. ( ) $\{(3, 4)\}$
b. (X) $\{(4, 5)\}$
c. ( ) $\left\{\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)\right\}$
d. ( ) $\{(6, 1)\}$

2) O par ordenado que constitui solução do sistema $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 8x - 3y = 3 \end{cases}$ é:

a. ( ) $(3, 2)$
b. ( ) $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}\right)$
c. (X) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$
d. ( ) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$

3) Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ podemos afirmar que o valor de:

a. ( ) **x** é menor que o de **y**.
b. ( ) **y** é a quarta parte do de **x**.
c. (X) **x** é o triplo do de **y**.
d. ( ) **y** é a metade do de **x**.

4) Para o sistema $\begin{cases} 3x + \dfrac{y}{6} = 16 \\ 4x - \dfrac{y}{3} = 18 \end{cases}$, os valores de **x** e **y** são respectivamente iguais a:

a. ( ) 7 e 12.
b. (X) 5 e 6.
c. ( ) 6 e 6.
d. ( ) 7 e 6.

5) Se $x = 2y + 3$ e $2x + 3y = -1$, então:

a. ( ) **y** é maior que **x**.
b. (X) **x** e **y** são simétricos.
c. ( ) **x** e **y** são inversos.
d. ( ) **x** e **y** são iguais.

6) Dado o sistema $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + 5y = 10 \\ \dfrac{x}{3} + 7y = 15 \end{cases}$ podemos afirmar que:

a. (X) $x = -60$
b. ( ) $y = -60$
c. ( ) $x = 5$
d. ( ) $y = -5$

PROBLEMAS DO PRIMEIRO GRAU ENVOLVENDO DUAS VARIÁVEIS

A REPRESENTAÇÃO DE UMA SENTENÇA

Você sabe que a representação de uma sentença pode ser feita através da linguagem comum ou através da linguagem matemática.

Muitas sentenças podem ser representadas, em linguagem matemática, com apenas uma letra; outras, no entanto, podem ser representadas com uma e também com duas letras.

Observe:

Linguagem comum	Linguagem matemática	
	Com uma letra	**Com duas letras**
Adicionando cinco a um número inteiro, obtém-se vinte.	número: x $x + 5 = 20$	
Diminuindo três do dobro de um número, obtém-se sete.	número: x $2x - 3 = 7$	
A soma de dois números inteiros e consecutivos é igual a nove.	número: x consecutivo: $x + 1$ $x + (x + 1) = 9$	número: x consecutivo: y $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$
A soma de dois números pares e consecutivos é igual a dezoito.	número menor: 2x número maior: $2x + 2$ $2x + (2x + 2) = 18$	número maior: x número menor: y $\begin{cases} x + y = 18 \\ x - y = 2 \end{cases}$
A soma de dois números, sendo um o quádruplo do outro, é igual a trinta.	número menor: x número maior: 4x $x + 4x = 30$	número menor: x número maior: y $\begin{cases} x + y = 30 \\ y = 4x \end{cases}$

Escreva as seguintes sentenças em linguagem matemática:

Linguagem comum	Linguagem matemática	
	Com uma letra	**Com duas letras**
A soma de dois números ímpares e consecutivos é igual a doze.	número menor: x número maior: $x + 2$ $x + x + 2 = 12$	número menor: x número maior: y $\begin{cases} x + y = 12 \\ y - x = 2 \end{cases}$
A soma de dois números, cuja diferença é cinco, é igual a dezenove.	número menor: x número maior: $x + 5$ $x + x + 5 = 19$	número menor: y número maior: x $\begin{cases} x + y = 19 \\ x - y = 5 \end{cases}$
A soma de dois números, sendo um o dobro do outro, é igual a trinta.	número menor: x número maior: 2x $x + 2x = 30$	número menor: y número maior: x $\begin{cases} x + y = 30 \\ x = 2y \end{cases}$
A soma de dois números, sendo um a metade do outro, é igual a dezoito.	número maior: x número menor: $\frac{x}{2}$ $x + \frac{x}{2} = 18$	número maior: x número menor: y $\begin{cases} x + y = 18 \\ y = \frac{x}{2} \end{cases}$

Escreva as seguintes sentenças em linguagem comum:

1) $x + 5x = 36$

Linguagem comum: ____________

2) $\begin{cases} x + y = 45 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Linguagem comum: ____________

3) $\begin{cases} x + y = 24 \\ x = \frac{y}{3} \end{cases}$

Linguagem comum: ____________

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS UTILIZANDO DUAS VARIÁVEIS

O sistema representado em linguagem matemática, com duas letras, pode ser resolvido através de qualquer método de resolução.

Vejamos um exemplo:

Determine dois números inteiros cuja soma é 50 e cuja diferença é 14.

Linguagem matemática:

Números: **x** e **y**

$\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 14 \end{cases}$

Resolução:

$\begin{cases} x + \not{y} = 50 \\ x - \not{y} = 14 \end{cases}$ (+)

$x + x = 50 + 14$

$2x = 64$

$x = \frac{64}{2}$

$\boxed{x = 32}$

$x + y = 50$

$32 + y = 50$

$y = 50 - 32$

$\boxed{y = 18}$

R.: Os números são 32 e 18.

Agora resolva você:

1) Quais são os dois números cuja soma é 30 e cuja diferença é 4?

Linguagem matemática:

Números: x e y

$\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 4 \end{cases}$

Resolução:

$\begin{cases} x + \not{y} = 30 \\ x - \not{y} = 4 \end{cases}$ (+)

$2x = 34$

$x = 17$

$x + y = 30$

$17 + y = 30$

$y = 30 - 17$

$y = 13$

R.: Os números são 17 e 13.

2) Supondo que na sua classe existam 35 alunos e que a diferença entre o número de meninos e o de meninas é 5, descubra quantos meninos e quantas meninas existem na sua classe.

Linguagem matemática:

Número de meninos: x

Número de meninas: y

$\begin{cases} x + y = 35 \\ x - y = 5 \end{cases}$

Resolução:

$\begin{cases} x + \not{y} = 35 \\ x - \not{y} = 5 \end{cases}$ (+)

$2x = 40$

$x = 20$

$x + y = 35$

$20 + y = 35$

$y = 35 - 20$

$y = 15$

R.: Existem 20 meninos e 15 meninas.

3) A soma dos termos de uma fração é 27. Determine essa fração, sabendo que a diferença entre o numerador e o denominador é 3.

Linguagem matemática:

Numerador: x

Denominador: y

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad (+)$$

$2x = 30$

$x = 15$

$x + y = 27$

$15 + y = 27$

$y = 27 - 15$

$y = 12$

R.: A fração é $\frac{15}{12}$.

Vejamos outro exemplo:

A soma de dois números é 48. Descubra esses números, sabendo que um é o triplo do outro.

Linguagem matemática:

Número maior: x

Número menor: y

$$\begin{cases} x + y = 48 \\ x = 3y \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x + y = 48 \\ x = 3y \end{cases}$$

$x + y = 48$

$3y + y = 48$

$4y = 48$

$y = \frac{48}{4}$

$y = 12$

$x = 3y$

$x = 3 \cdot (12)$

$x = 36$

R.: Os números são 36 e 12.

4) Têm-se dois números, sendo um o quádruplo do outro. Determine esses números, sabendo que a soma deles é igual a 40.

Linguagem matemática:

Número maior: x

Número menor: y

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x = 4y \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x = 4y \end{cases}$$

$x + y = 40$

$4y + y = 40$

$5y = 40$

$y = 8$

$x = 4y$

$x = 4 \cdot (8)$

$x = 32$

R.: Os números são 32 e 8.

5) O número de rapazes de um colégio é o dobro do número de moças. Sabendo que existem 900 alunos, determine quantos rapazes e quantas moças estudam nesse colégio.

Linguagem matemática:

Número de rapazes: x

Número de moças: y

$$\begin{cases} x + y = 900 \\ x = 2y \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x + y = 900 \\ x = 2y \end{cases}$$

$x + y = 900$

$2y + y = 900$

$3y = 900$

$y = 300$

$x = 2y$

$x = 2 \cdot (300)$

$x = 600$

R.: 600 rapazes e 300 moças.

6) A diferença entre os termos de uma fração é 8. Descubra essa fração, sabendo que o denominador é o quíntuplo do numerador.

Linguagem matemática:

Numerador: x

Denominador: y

$\begin{cases} y - x = 8 \\ y = 5x \end{cases}$

Resolução:

$\begin{cases} y - x = 8 \\ y = 5x \end{cases}$

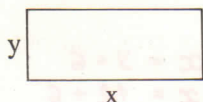
$y - x = 8$
$5x - x = 8$
$4x = 8$
$x = 2$

$y = 5x$
$y = 5.(2)$
$y = 10$

R.: A fração é $\frac{2}{10}$

Vejamos outro exemplo:

O perímetro de um retângulo mede 40 cm. Determine as dimensões desse retângulo, sabendo que a medida da base é o triplo da medida da altura.

Linguagem matemática:

Base: x

Altura: y

$\begin{cases} x + y = 20 \\ x = 3y \end{cases}$

Resolução:

$\begin{cases} x + y = 20 \\ x = 3y \end{cases}$

$x + y = 20$
$3y + y = 20$
$4y = 20$
$y = 5$

$x = 3y$
$x = 3 \cdot (5)$
$x = 15$

R.: A medida da base é 15 cm, e a medida da altura é 5 cm.

7) A medida da base de um retângulo é o sêxtuplo da medida da altura. Determine essas dimensões, sabendo que o perímetro mede 56 m.

Linguagem matemática:

Base: x

Altura: y

$\begin{cases} x + y = 28 \\ x = 6y \end{cases}$

Resolução:

$\begin{cases} x + y = 28 \\ x = 6y \end{cases}$

$x + y = 28$
$6y + y = 28$
$7y = 28$
$y = 4$

$x = 6y$
$x = 6.(4)$
$x = 24$

R.: A medida da base é 24 m, e a medida da altura é 4 m.

8) A diferença entre a medida da base e a medida da altura de um retângulo é 16 cm. Sabendo que a medida da base é o triplo da medida da altura, determine o seu perímetro.

Linguagem matemática:

Base: x

Altura: y

$\begin{cases} x - y = 16 \\ x = 3y \end{cases}$

Resolução:

$\begin{cases} x - y = 16 \\ x = 3y \end{cases}$

$x - y = 16$
$3y - y = 16$
$2y = 16$
$y = 8$

$x = 3y$
$x = 3.(8)$
$x = 24$

perímetro $= 8 + 24 + 8 + 24 = 64$ cm

R.: O perímetro é 64 cm.

Vejamos outro exemplo:

Decompor o número 36 em duas parcelas, de modo que uma exceda a outra em 4 unidades.

Linguagem matemática:

1.ª parcela: x

2.ª parcela: y

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x = y + 4 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x = y + 4 \end{cases}$$

$x + y = 36$

$y + 4 + y = 36$

$y + y = 36 - 4$

$2y = 32$

$y = 16$

$x = y + 4$

$x = 16 + 4$

$x = 20$

R.: As parcelas são 20 e 16.

9) Decomponha o número 30 em duas parcelas, de modo que uma exceda a outra em 6 unidades.

Linguagem matemática:

1.ª parcela: x

2.ª parcela: y

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x = y + 6 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x = y + 6 \end{cases}$$

$x + y = 30$

$y + 6 + y = 30$

$y + y = 30 - 6$

$2y = 24$

$y = 12$

$x = y + 6$

$x = 12 + 6$

$x = 18$

R.: As parcelas são 18 e 12.

10) A medida da base de um retângulo excede a medida da altura em 12 unidades. Determine essas dimensões, sabendo que o perímetro mede 96 m.

Linguagem matemática:

Base: x

Altura: y

$$\begin{cases} x + y = 48 \\ x = y + 12 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x + y = 48 \\ x = y + 12 \end{cases}$$

$x + y = 48$

$y + 12 + y = 48$

$y + y = 48 - 12$

$2y = 36$

$y = 18$

$x = y + 12$

$x = 18 + 12$

$x = 30$

R.: A base mede 30 m e a altura mede 18 m.

11) Na classe de Paulo existem 40 alunos. Sabendo que o número de meninos excede o número de meninas em 8 unidades, descubra quantos meninos e quantas meninas existem na classe de Paulo.

Linguagem matemática:

Número de meninos: x

Número de meninas: y

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x = y + 8 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x = y + 8 \end{cases}$$

$x + y = 40$

$y + 8 + y = 40$

$y + y = 40 - 8$

$2y = 32$

$y = 16$

$x = y + 8$

$x = 16 + 8$

$x = 24$

R.: 24 meninos e 16 meninas.

12) Um pai repartiu Cr$ 500,00 entre seus dois filhos. A quantia recebida pelo mais velho excede em Cr$ 200,00 a recebida pelo mais jovem. Quanto recebeu cada um?

Linguagem matemática:

Mais velho: x

Mais jovem: y

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ x = y + 200 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ x = y + 200 \end{cases}$$

$x + y = 500$
$y + 200 + y = 500$
$y + y = 500 - 200$
$2y = 300$
$y = 150$

$x = y + 200$
$x = 150 + 200$
$x = 350$

R.: O mais velho recebeu Cr$ 350,00, e o mais jovem recebeu Cr$ 150,00.

Vejamos outro exemplo:

Dois números estão na razão de $\frac{3}{5}$. Descubra esses números, sabendo que a soma deles é 56.

Linguagem matemática:

Número menor: x
Número maior: y

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \\ x + y = 56 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \Longrightarrow 5x = 3y \Longrightarrow x = \frac{3y}{5} \\ x + y = 56 \end{cases}$$

$x + y = 56$

$\frac{3y}{5} + y = 56$

$\frac{3y + 5y}{5} = \frac{280}{5}$

$8y = 280$

$y = 35$

$x = \frac{3y}{5}$

$x = \frac{3.(35)}{5}$

$x = 21$

R.: Os números são 21 e 35.

13) As medidas da base e da altura de um retângulo estão na razão de $\frac{4}{3}$. Determine as dimensões desse retângulo, sabendo que o perímetro mede 70 cm.

Linguagem matemática:

Base: x

Altura: y

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \\ x + y = 35 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \Longrightarrow 3x = 4y \Longrightarrow x = \frac{4y}{3} \\ x + y = 35 \end{cases}$$

$x + y = 35$

$\frac{4y}{3} + y = 35$

$\frac{4y + 3y}{3} = \frac{105}{3}$

$7y = 105$

$y = 15$

$x = \frac{4y}{3}$

$x = \frac{4.(15)}{3}$

$x = 20$

R.: A base mede 20 cm, e a altura mede 15 cm.

14) A diferença entre dois números é 14. Determine esses números, sabendo que o quociente deles é 8.

Linguagem matemática:

Número maior: x

Número menor: y

$$\begin{cases} x - y = 14 \\ \frac{x}{y} = 8 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x - y = 14 \\ \frac{x}{y} = 8 \Rightarrow x = 8y \end{cases}$$

$x - y = 14$
$8y - y = 14$
$7y = 14$
$y = 2$

$x = 8y$
$x = 8.(2)$
$x = 16$

R.: Os números são 16 e 2

Vejamos outro exemplo:

Marco e Rogério possuem certa quantia em dinheiro. A quantia que Marco possui, aumentada de 2, é igual à de Rogério diminuída de 3. Subtraindo 10 do triplo da quantia de Marco, obtém-se o dobro da quantia de Rogério. Quanto possui cada um?

Linguagem matemática:

Marco: x

Rogério: y

$$\begin{cases} x + 2 = y - 3 \\ 3x - 10 = 2y \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x + 2 = y - 3 \rightarrow x - y = -5 \xrightarrow{(-2)} -2x + 2y = 10 \\ 3x - 10 = 2y \rightarrow 3x - 2y = 10 \longrightarrow 3x - 2y = 10 \end{cases}$$

$(+)$ $x = 20$

$x + 2 = y - 3$
$20 + 2 = y - 3 \Longrightarrow -y = -3 - 20 - 2$
$-y = -25$
$y = 25$

R.: Marco possui Cr$ 20,00 e Rogério, Cr$ 25,00.

15) Subtraindo 11 da idade de um pai, obtém-se o dobro da idade do filho. Adicionando 1 à idade do pai, obtém-se o triplo da idade do filho. Descubra as idades de pai e filho.

Linguagem matemática:

Pai: x

Filho: y

$$\begin{cases} x - 11 = 2y \\ x + 1 = 3y \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x - 11 = 2y \rightarrow x - 2y = 11 \longrightarrow x - 2y = 11 \\ x + 1 = 3y \rightarrow x - 3y = -1 \xrightarrow{(-1)} -x + 3y = 1 \end{cases}$$

$(+)$ $y = 12$

$x - 11 = 2y$
$x - 11 = 2.(12)$
$x - 11 = 24 \Longrightarrow x = 24 + 11$
$x = 35$

R.: O pai tem 35 anos, e o filho, 12 anos.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Resolva os seguintes problemas:

1) A soma de dois números é 40, e a diferença entre eles é 14. Quais são esses números? (27 e 13)

2) A soma de dois números é 70, e a diferença entre eles é 26. Quais são esses números? (48 e 22)

3) Numa partida de basquete, o número de pontos da equipe A é igual ao dobro do número de pontos da equipe B. Sabendo que o total de pontos foi de 135, descubra qual foi o resultado dessa partida. (90 a 45)

4) Numa fábrica com 420 operários, sabe-se que o número de homens é o quíntuplo do número de mulheres. Determine quantos homens e quantas mulheres trabalham nessa fábrica. (350 e 70)

5) Uma fração é equivalente a $\frac{4}{5}$. Descubra essa fração, sabendo que o denominador excede o numerador em 5 unidades. $\left(\frac{20}{25}\right)$

6) Num jardim existem roseiras brancas e vermelhas, num total de 35 pés. O número de roseiras brancas excede o de roseiras vermelhas em 9 unidades. Quantos pés de cada uma existem nesse jardim?

(22 roseiras brancas e 13 vermelhas)

7) A idade de um pai está para a de seu filho assim como $\frac{10}{3}$. Sabendo que a diferença entre essas idades é 35 anos, descubra cada uma delas. (50 anos e 15 anos)

8) Foi distribuída a quantia de Cr$ 650,00 entre dois irmãos. Sabendo que as quantias recebidas estão na razão $\frac{6}{7}$, descubra quanto recebeu cada irmão. (Cr$ 300,00 e Cr$ 350,00)

9) Dois barris, A e B, contêm vinho. O volume, em litros, de vinho do barril A, aumentado de 5, é igual ao volume, em litros, de vinho do barril B, diminuído de 3. Sabendo que o triplo do volume, em litros, do barril A excede em 24 o dobro do volume, em litros, do barril B, descubra quantos litros de vinho contém cada barril. (A: 40 ℓ; B: 48 ℓ)

10) Marco é 4 anos mais velho que Rogério. Adicionando 20 à idade de Marco, ela se torna igual ao triplo da idade de Rogério. Determine a idade de cada um. (Marco: 16 anos; Rogério: 12 anos)

11) Decomponha o número 200 em duas parcelas, de modo que uma seja o triplo da outra. Que parcelas você obtém? (150 e 50)

12) Um pai distribui 26 balas entre seus filhos Rogério e Lígia. Adicionando 7 ao triplo do número de balas recebidas por Rogério, obtém-se o dobro do número de balas recebidas por Lígia. Quantas balas recebeu cada um? (Rogério: 9; Lígia: 17)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Resolva os seguintes problemas:

1) Adicionando à idade de um pai a de seu filho, obtém-se 52 anos. Sabendo que, subtraindo 4 do triplo da idade do filho, obtém-se a idade do pai, descubra a idade de cada um. (38 anos e 14 anos)

2) Distribuem-se Cr$ 1 200,00 para duas pessoas. Sabendo que a quantia recebida por uma é o dobro da quantia recebida pela outra, quanto recebeu cada uma? (Cr$ 800,00 e Cr$ 400,00)

3) Uma fração é equivalente a $\frac{3}{4}$. Descubra essa fração, sabendo que o denominador excede o numerador em 6 unidades. $\left(\frac{18}{24}\right)$

4) A idade de um pai é o quádruplo da idade do filho. Descubra essas idades, sabendo que a diferença entre elas é 36 anos. (48 anos e 12 anos)

5) Uma fração é equivalente a $\frac{2}{3}$. Descubra qual é essa fração, sabendo que, adicionando 1 ao numerador e subtraindo 1 do denominador, obtém-se outra fração, equivalente a $\frac{3}{4}$. ($\frac{14}{21}$)

6) Têm-se dois números, de modo que, diminuindo 1 da terça parte do primeiro, obtém-se a quinta parte do segundo; e aumentando de 2 a quarta parte do primeiro, obtém-se a terça parte do segundo. Quais são esses números? (12 e 15)

7) Decomponha o número 80 em duas parcelas, de modo que $\frac{2}{5}$ da primeira sejam iguais a $\frac{2}{3}$ da segunda. (50 e 30)

8) Decomponha o número 99 em duas parcelas, de modo que os $\frac{3}{4}$ da primeira excedam os $\frac{2}{3}$ da segunda em 2 unidades. (48 e 51)

b) Resolva os testes:

1) Em um jogo de basquete, a soma de pontos dos dois quintetos foi 94, sendo que um deles marcou 32 pontos a mais que o outro. O resultado do jogo foi de:
   - a. ( ) 50 a 44.
   - b. (X) 63 a 31.
   - c. ( ) 48 a 46.
   - d. ( ) 61 a 33.

2) O perímetro de um retângulo mede 88 m. Sabendo que a medida da base é igual ao triplo da medida da altura, pode-se dizer que essas medidas são:
   - a. (X) 33 m e 11 m.
   - b. ( ) 10 m e 30 m.
   - c. ( ) 40 m e 48 m.
   - d. ( ) 12 m e 36 m.

3) A soma de dois números é 75, e a diferença entre eles é 23. Esses números são:
   - a. ( ) 25 e 50.
   - b. (X) 49 e 26.
   - c. ( ) 46 e 29.
   - d. ( ) 35 e 40.

4) Pagou-se a quantia de Cr$ 310,00 com 11 notas, algumas de dez cruzeiros e outras de cinqüenta cruzeiros. Quantas eram as notas de dez e quantas as de cinqüenta?
   - a. ( ) 5 de dez e 6 de cinqüenta.
   - b. ( ) 8 de dez e 3 de cinqüenta.
   - c. (X) 6 de dez e 5 de cinqüenta.
   - d. ( ) 9 de dez e 2 de cinqüenta.

5) Num compartimento existem bicicletas e triciclos, num total de 38 rodas e 14 assentos. O número de bicicletas e de triciclos é, respectivamente:
   - a. (X) 4 e 10.
   - b. ( ) 5 e 9.
   - c. ( ) 3 e 11.
   - d. ( ) 10 e 6.

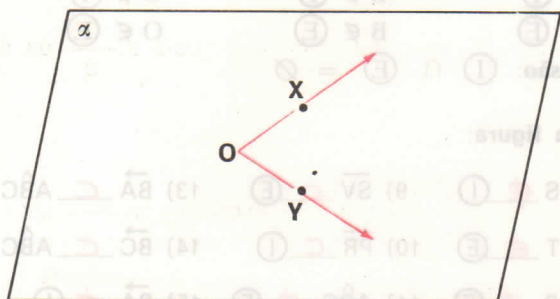
6) A soma de dois números é 93; o quociente do maior pelo menor é 9; o resto dessa divisão é 3. Os números são:
   - a. (X) 84 e 9.
   - b. ( ) 82 e 11.
   - c. ( ) 79 e 13.
   - d. ( ) 80 e 13.

7) A razão entre dois números positivos é $\frac{8}{7}$, e a diferença entre eles é 2. Os números são:
   - a. ( ) 64 e 62.
   - b. ( ) 37 e 35.
   - c. (X) 16 e 14.
   - d. ( ) 54 e 52.

8) Em uma fábrica trabalham 33 operários. Sabemos que, se forem demitidos 3 homens e admitidas 4 mulheres, o número de homens e de mulheres passará a ser igual. Logo, trabalham nessa fábrica:
   - a. (X) 20 homens e 13 mulheres.
   - b. ( ) 10 homens e 23 mulheres.
   - c. ( ) 15 homens e 18 mulheres.
   - d. ( ) 17 homens e 16 mulheres.

ÂNGULO

NOÇÃO DE ÂNGULO

Observe a figura:

Nesta figura, você encontra duas semi-retas: $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$. Elas estão contidas no plano α e têm a mesma origem O. Pois bem, a figura assim formada recebe o nome de **ângulo**, sendo que o ponto O (origem das semi-retas) denomina-se **vértice** e as semi-retas recebem o nome de **lados**.

Então, podemos afirmar que ângulo é a figura formada por duas semi-retas de mesma origem e não-opostas (não-colineares).

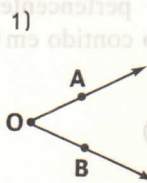
O ângulo ao lado pode ser indicado da seguinte forma:
$X\hat{O}Y$ ou $Y\hat{O}X$ ou $\hat{O}$

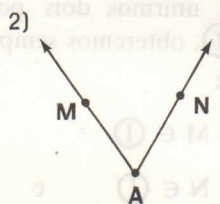
Logo: $\overrightarrow{OX} \cup \overrightarrow{OY} = X\hat{O}Y$

$\overrightarrow{OX} \cap \overrightarrow{OY} = \{O\}$

VAMOS EXERCITAR

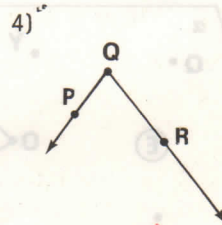
a) Complete conforme o modelo:

1)

Ângulo: $A\hat{O}B$
Lados: $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$
Vértice: O
$\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB} = A\hat{O}B$
$\overrightarrow{OA} \cap \overrightarrow{OB} = \{O\}$

2)

Ângulo: $M\hat{A}N$
Lados: $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AN}$
Vértice: A
$\overrightarrow{AM} \cup \overrightarrow{AN} = M\hat{A}N$
$\overrightarrow{AM} \cap \overrightarrow{AN} = \{A\}$

3)

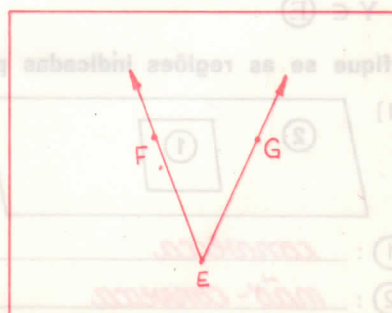
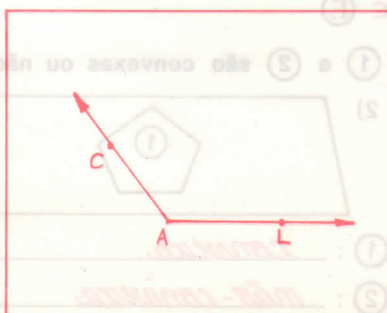
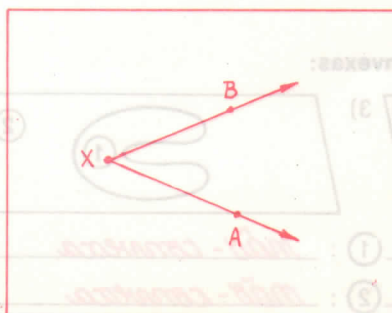
Ângulo: $L\hat{M}N$
Lados: $\overrightarrow{ML}$ e $\overrightarrow{MN}$
Vértice: M
$\overrightarrow{ML} \cup \overrightarrow{MN} = L\hat{M}N$
$\overrightarrow{ML} \cap \overrightarrow{MN} = \{M\}$

4)

Ângulo: $P\hat{Q}R$
Lados: $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{QR}$
Vértice: Q
$\overrightarrow{QP} \cup \overrightarrow{QR} = P\hat{Q}R$
$\overrightarrow{QP} \cap \overrightarrow{QR} = \{Q\}$

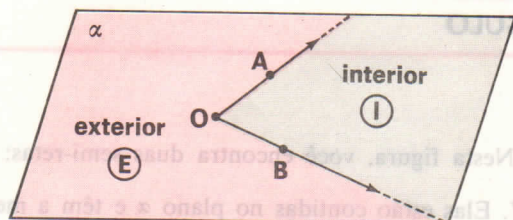
b) Construa em cada quadro o ângulo correspondente à indicação apresentada:

1) $B\hat{X}A$

2) $C\hat{A}L$

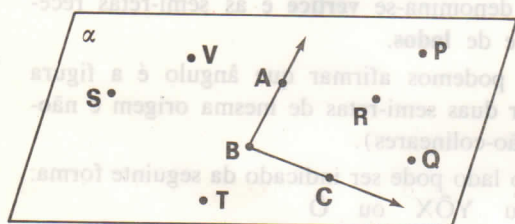
3) Vértice: E
Lados: $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{EG}$

AS REGIÕES ESTABELECIDAS POR UM ÂNGULO

Um ângulo divide o plano que o contém em duas regiões denominadas: **interior** e **exterior**.

Veja:

Note que o ângulo é a fronteira divisória das duas regiões. Deste modo:

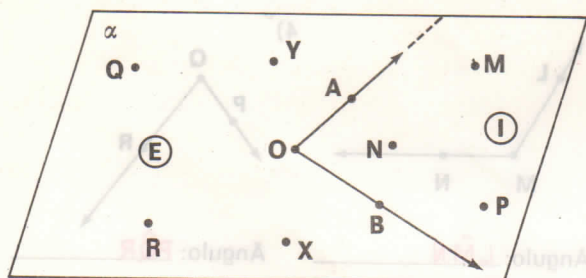
$A \in A\hat{O}B$	$B \in A\hat{O}B$	$O \in A\hat{O}B$
$A \notin$ Ⓘ	$B \notin$ Ⓘ	$O \notin$ Ⓘ
$A \notin$ Ⓔ	$B \notin$ Ⓔ	$O \notin$ Ⓔ

Conclusão: Ⓘ $\cap$ Ⓔ $= \varnothing$

Coloque o símbolo adequado ($\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$) de acordo com a figura:

1) A $\in$ $A\hat{B}C$
2) R $\notin$ $A\hat{B}C$
3) T $\notin$ $A\hat{B}C$
4) R $\in$ Ⓘ
5) S $\notin$ Ⓘ
6) T $\in$ Ⓔ
7) R $\notin$ Ⓔ
8) V $\in$ Ⓔ
9) $\overline{SV}$ $\subset$ Ⓔ
10) $\overline{PR}$ $\subset$ Ⓘ
11) $A\hat{B}C$ $\not\subset$ Ⓔ
12) $A\hat{B}C$ $\not\subset$ Ⓘ
13) $\overrightarrow{BA}$ $\subset$ $A\hat{B}C$
14) $\overrightarrow{BC}$ $\subset$ $A\hat{B}C$
15) $\overrightarrow{BA}$ $\not\subset$ Ⓘ
16) $A\hat{B}C$ $\subset$ α

Agora efetue as operações: 1) Ⓘ $\cap$ Ⓔ $=$ $\varnothing$
2) Ⓘ $\cup$ $A\hat{B}C$ $\cup$ Ⓔ $=$ α

UM FATO IMPORTANTE: O INTERIOR É UMA REGIÃO CONVEXA

Analisando esta figura, você pode perceber que:

- se unirmos dois pontos quaisquer pertencentes a Ⓘ, obteremos sempre um segmento contido em Ⓘ.

Veja:

M $\in$ Ⓘ $\overline{MN} \subset$ Ⓘ
N $\in$ Ⓘ   e $\overline{MP} \subset$ Ⓘ
P $\in$ Ⓘ $\overline{NP} \subset$ Ⓘ

Por causa disso, dizemos que o **interior** é uma **região convexa.**

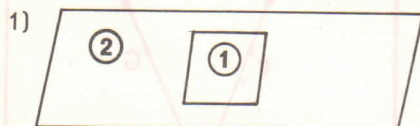
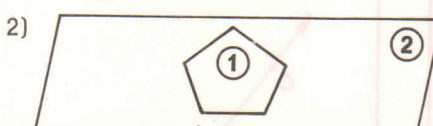
Observe agora que:

- se unirmos dois pontos quaisquer pertencentes a Ⓔ, nem sempre obteremos um segmento contido em Ⓔ.

Veja:

Q $\in$ Ⓔ e Y $\in$ Ⓔ e $\overline{QY} \subset$ Ⓔ, mas X $\in$ Ⓔ e Y $\in$ Ⓔ e $\overline{XY} \not\subset$ Ⓔ

Como você pode ver, o **exterior** é uma **região não-convexa.**

Verifique se as regiões indicadas por ① e ② são convexas ou não-convexas:

1)

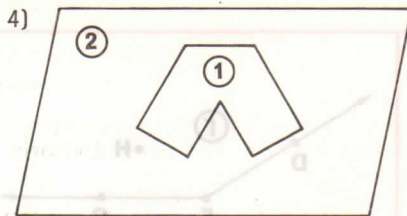
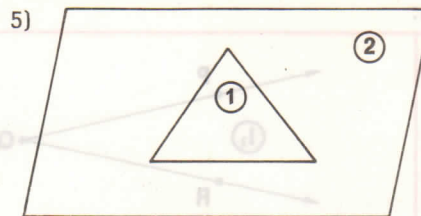
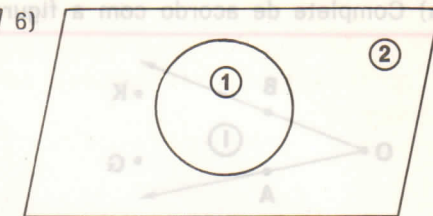
① : convexa
② : não-convexa

2)

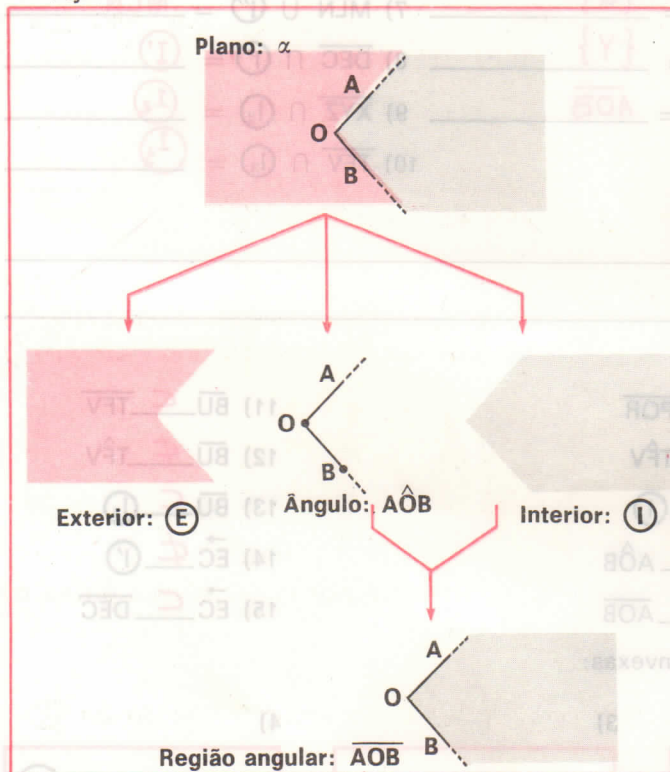
② (label)

① : convexa
② : não-convexa

3)

① : não-convexa
② : não-convexa

REGIÃO ANGULAR

Você já sabe que um ângulo divide o plano em duas regiões: **interior** e **exterior**. Pois bem, o conjunto união do ângulo e do interior recebe o nome de **região angular**.

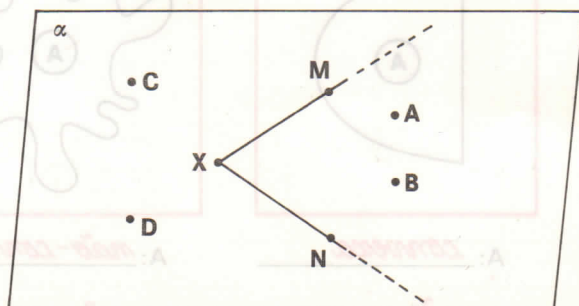
Veja:

Através desse esquema, você pode perceber algumas noções importantes:

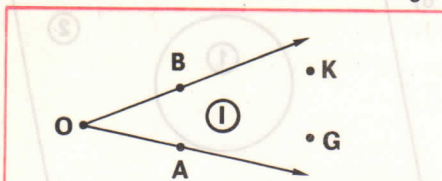
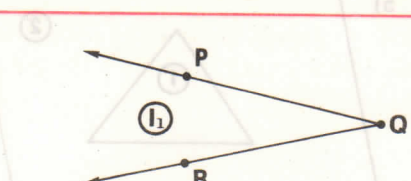
- O **ângulo** é a figura formada somente pelas semi-retas.
- O **interior** não contém o **ângulo**.
  Ⓘ ⊅ AOB ou AOB ⊄ Ⓘ
- O **exterior** não contém o **ângulo**.
  Ⓔ ⊅ AOB ou AOB ⊄ Ⓔ
- O conjunto união do **exterior**, do **ângulo** e do **interior** é o plano.
  Ⓔ ∪ AOB ∪ Ⓘ = α
- O **exterior** e o **interior** não têm ponto comum.
  Ⓔ ∩ Ⓘ = ∅
- A **região angular** é o conjunto união do **ângulo** e do **interior**.

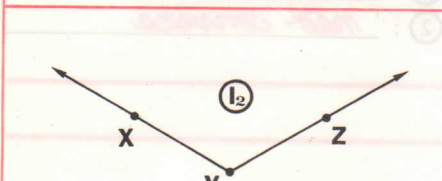
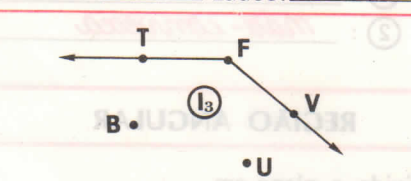
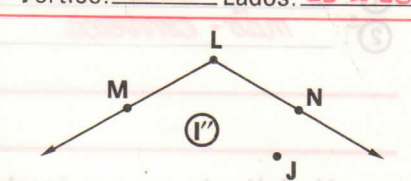
  $\overline{AOB}$ = AOB ∪ Ⓘ
- A **região angular** contém o **ângulo**.

  $\overline{AOB}$ ⊃ AOB ou AOB ⊂ $\overline{AOB}$
- A **região angular** contém o **interior**.

  $\overline{AOB}$ ⊃ Ⓘ ou Ⓘ ⊂ $\overline{AOB}$

Coloque o símbolo (∈, ∉, ⊂, ⊄) de acordo com a figura:

1) C ∉ $\overline{MXN}$
2) C ∈ E
3) A ∉ MX̂N
4) A ∈ I
5) B ∈ $\overline{MXN}$
6) D ∉ $\overline{MXN}$
7) $\overline{AB}$ ⊂ Ⓘ
8) $\overline{AB}$ ⊂ $\overline{MXN}$
9) $\overline{AB}$ ⊄ MX̂N
10) $\overline{AB}$ ⊂ α
11) $\overline{CD}$ ⊂ E
12) $\overline{CD}$ ⊄ MX̂N
13) $\overline{CD}$ ⊄ $\overline{MXN}$
14) I ⊂ $\overline{MXN}$
15) Ⓔ ⊄ $\overline{MXN}$

a) Complete de acordo com a figura:

Vértice: O Lados: $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$

Vértice: Q Lados: $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{QR}$

Vértice: E Lados: $\overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{EC}$

Vértice: Y Lados: $\overrightarrow{YX}$ e $\overrightarrow{YZ}$

Vértice: F Lados: $\overrightarrow{FT}$ e $\overrightarrow{FV}$

Vértice: L Lados: $\overrightarrow{LM}$ e $\overrightarrow{LN}$

Agora efetue:

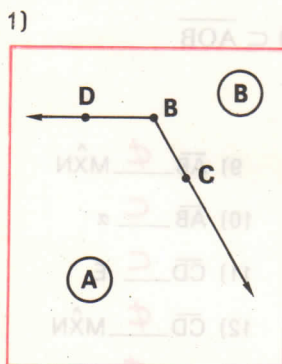
1) $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$ = $A\hat{O}B$
2) $\overrightarrow{ED} \cup \overrightarrow{EC}$ = $C\hat{E}D$
3) $\overrightarrow{FT} \cup \overrightarrow{FV}$ = $T\hat{F}V$
4) $\overrightarrow{QP} \cap \overrightarrow{QR}$ = $\{Q\}$
5) $\overrightarrow{YX} \cap \overrightarrow{YZ}$ = $\{Y\}$
6) $A\hat{O}B \cup$ Ⓘ = $\overline{AOB}$
7) $M\hat{L}N \cup$ (I'') = $\overline{MLN}$
8) $\overline{DEC} \cap$ (I') = (I')
9) $\overline{XYZ} \cap$ (I_2) = (I_2)
10) $\overline{TFV} \cap$ (I_3) = (I_3)

Dê o nome conforme a indicação:

1) $P\hat{Q}R$: ângulo
2) $\overline{MLN}$: região angular

Coloque o símbolo adequado ($\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$):

1) A $\notin$ I
2) O $\in$ $A\hat{O}B$
3) H $\notin$ $D\hat{E}C$
4) H $\in$ $\overline{DEC}$
5) J $\in$ (I'')
6) (I_1) $\subset$ $\overline{PQR}$
7) (I_3) $\not\subset$ $T\hat{F}V$
8) $\overline{KG}$ $\subset$ Ⓘ
9) $\overline{KG}$ $\not\subset$ $A\hat{O}B$
10) $\overline{KG}$ $\subset$ $\overline{AOB}$
11) $\overline{BU}$ $\subset$ $\overline{TFV}$
12) $\overline{BU}$ $\not\subset$ $T\hat{F}V$
13) $\overline{BU}$ $\subset$ (I_3)
14) $\overrightarrow{EC}$ $\not\subset$ (I')
15) $\overrightarrow{EC}$ $\subset$ $\overline{DEC}$

b) Indique se as regiões A e B são convexas ou não-convexas:

1)

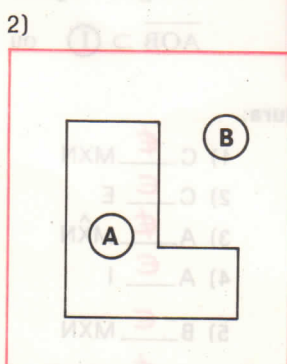
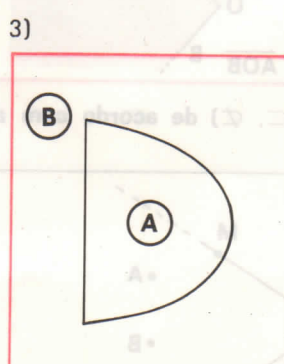
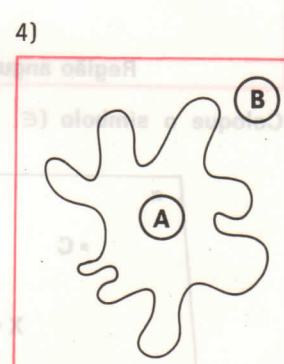
A: convexa
B: não-convexa

2)

A: não-convexa
B: não-convexa

3)

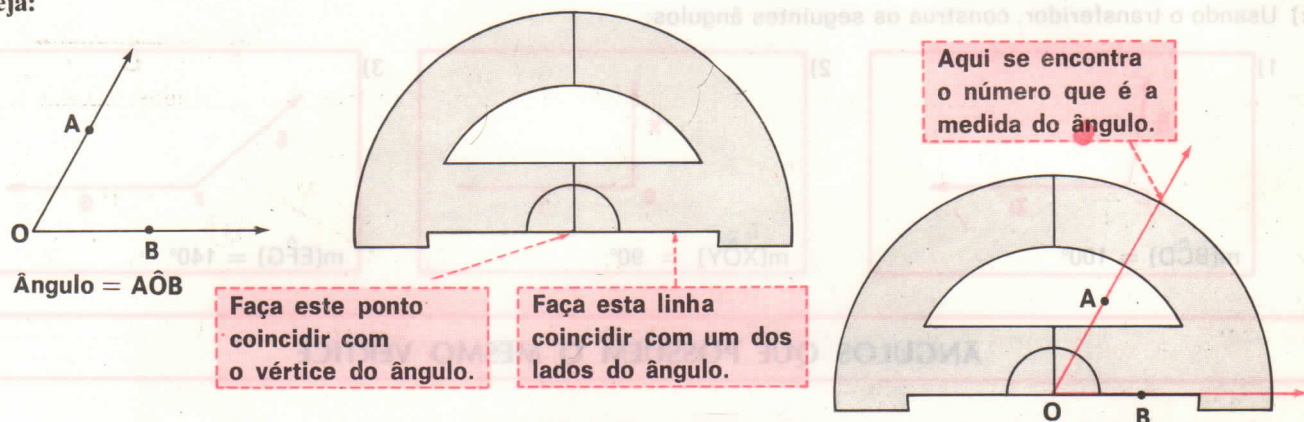
A: convexa
B: não-convexa

4)

A: não-convexa
B: não-convexa

COMO OBTER A MEDIDA DE UM ÂNGULO: O USO DO TRANSFERIDOR

O instrumento que se usa para obter a medida de um ângulo é o **transferidor**. Este instrumento é aferido numa unidade de medida chamada **grau**. Deste modo, o número de graus de um ângulo é a sua medida.

Vamos determinar a medida do ângulo AÔB.

Veja:

Indicação: m(AÔB) = 60º (Lê-se: A medida do ângulo AÔB é igual a sessenta graus.)

Então: m(AÔB) = 60 º — unidade de medida (grau)

medida

VAMOS EXERCITAR

a) Usando um transferidor, determine a medida dos ângulos:

1) m(AÔB) = 30°

2) m(BX̂C) = 80°

3) m(AM̂B) = 30°

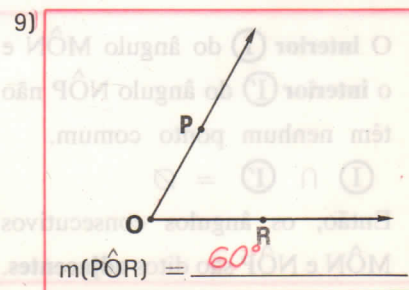
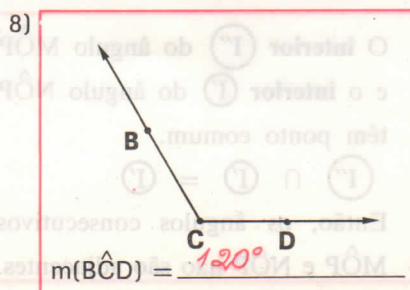
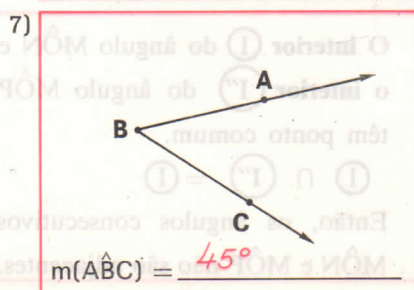
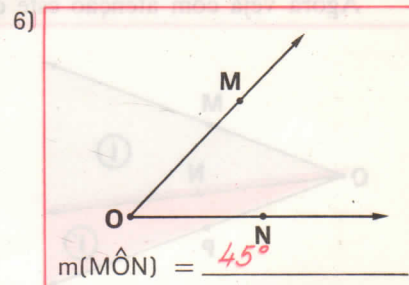
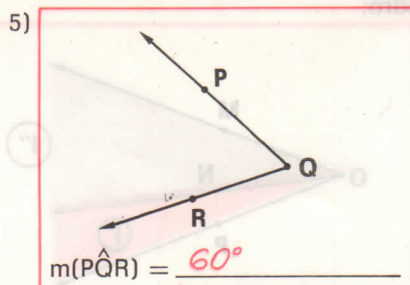
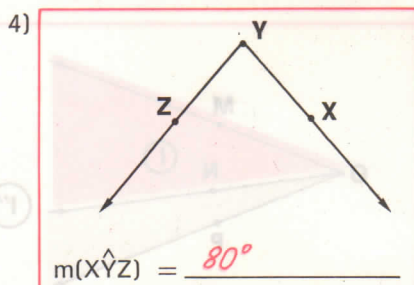
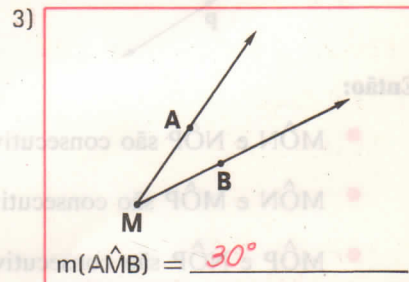
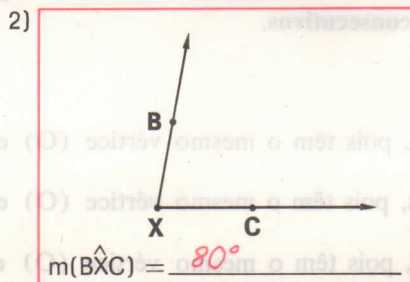
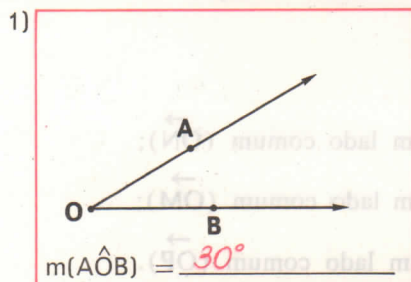
4) m(XŶZ) = 80°

5) m(PQ̂R) = 60°

6) m(MÔN) = 45°

7) m(AB̂C) = 45°

8) m(BĈD) = 120°

9) m(PÔR) = 60°

b) Verifique quais os ângulos da questão anterior que apresentam a mesma medida:

AÔB e AM̂B medem 30°   MÔN e AB̂C medem 45°

BX̂C e XŶZ medem 80°   PQ̂R e PÔR medem 60°

Os ângulos que têm a mesma medida na mesma unidade são denominados **ângulos congruentes**. Então, são congruentes os ângulos: AÔB e AM̂B, BX̂C e XŶZ, MÔN e AB̂C, PQ̂R e PÔR.

c) Usando o transferidor, construa os seguintes ângulos:

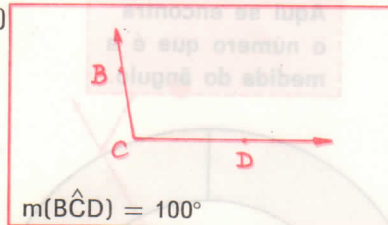
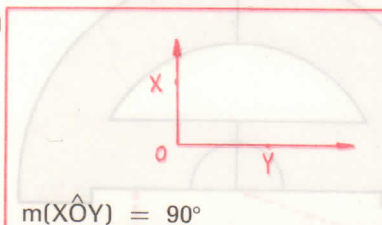
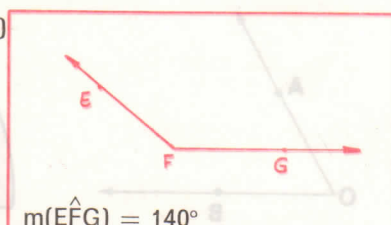
1)

m(BĈD) = 100°

2)

m(XÔY) = 90°

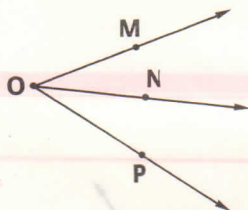
3)

m(EF̂G) = 140°

ÂNGULOS QUE POSSUEM O MESMO VÉRTICE

Dentre os casos de ângulos com o mesmo vértice, são importantes:

a) os ângulos consecutivos e adjacentes;   b) os ângulos opostos pelo vértice.

ÂNGULOS CONSECUTIVOS E ADJACENTES

Observe a figura:

Nesta figura você encontra três ângulos com o mesmo vértice (O): MÔN, NÔP e MÔP.

Dois desses ângulos, quaisquer que sejam eles, possuem o mesmo vértice e um lado comum. Dois ângulos nestas condições são denominados **consecutivos**.

Então:

- MÔN e NÔP são consecutivos, pois têm o mesmo vértice (O) e um lado comum ($\overrightarrow{ON}$);
- MÔN e MÔP são consecutivos, pois têm o mesmo vértice (O) e um lado comum ($\overrightarrow{OM}$);
- MÔP e NÔP são consecutivos, pois têm o mesmo vértice (O) e um lado comum ($\overrightarrow{OP}$).

Agora veja com atenção este quadro:

O **interior** Ⓘ do ângulo MÔN e o **interior** Ⓘ′ do ângulo NÔP não têm nenhum ponto comum.

Ⓘ ∩ Ⓘ′ = ∅

Então, os ângulos consecutivos MÔN e NÔP são ditos **adjacentes**.

O **interior** Ⓘ″ do ângulo MÔP e o **interior** Ⓘ′ do ângulo NÔP têm ponto comum.

Ⓘ″ ∩ Ⓘ′ = Ⓘ′

Então, os ângulos consecutivos MÔP e NÔP não são adjacentes.

O **interior** Ⓘ do ângulo MÔN e o **interior** Ⓘ″ do ângulo MÔP têm ponto comum.

Ⓘ ∩ Ⓘ″ = Ⓘ

Então, os ângulos consecutivos MÔN e MÔP não são adjacentes.

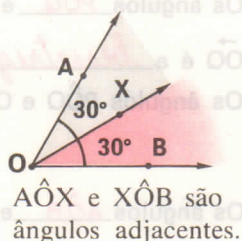
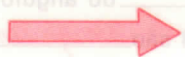
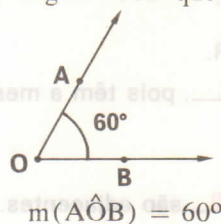
UMA SEMI-RETA ESPECIAL: A BISSETRIZ

Bissetriz de um ângulo é o nome que recebe a semi-reta contida no interior desse ângulo e que determina dois ângulos adjacentes congruentes.

Observe:

Considere o ângulo $A\hat{O}B$ que mede 60º.

$m(A\hat{O}B) = 60^\circ$

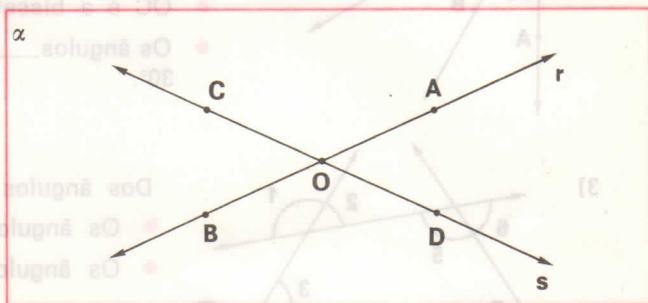
$A\hat{O}X$ e $X\hat{O}B$ são ângulos adjacentes.

Como $m(A\hat{O}X) = 30^\circ$ e $m(X\hat{O}B) = 30^\circ$, então a semi-reta $\overrightarrow{OX}$ é a bissetriz do ângulo AOB.

ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

Considere duas retas **r** e **s** que se interceptam num ponto O.

Perceba que estas retas determinam quatro ângulos: $A\hat{O}C$, $C\hat{O}B$, $B\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$.

Considere a figura ao lado. Veja que:

- $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$ são ângulos adjacentes;
- $C\hat{O}B$ e $B\hat{O}D$ são ângulos adjacentes;
- $B\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$ são ângulos adjacentes;
- $D\hat{O}A$ e $A\hat{O}C$ são ângulos adjacentes.

$r \cap s = \{O\}$

Agora observe que os ângulos $A\hat{O}D$ e $C\hat{O}B$ ou $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ não são adjacentes, mas apresentam um detalhe especial: **os lados de um são semi-retas opostas aos lados do outro**. Tais ângulos denominam-se **opostos pelo vértice** (o.p.v.).

Então:

- $A\hat{O}D$ e $C\hat{O}B$ são ângulos opostos pelo vértice;
- $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ são ângulos opostos pelo vértice.

Você pode comprovar, por meio do transferidor, que as medidas de dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.

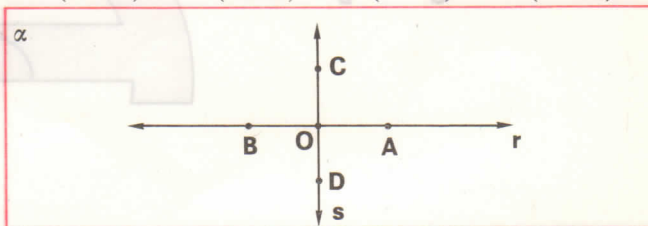
Logo, podemos concluir que **os ângulos opostos pelo vértice são congruentes**.

UM ÂNGULO ESPECIAL: O ÂNGULO RETO

Suponha que as retas **r** e **s** se interceptem no ponto O e determinem quatro ângulos com a mesma medida.

$$m(A\hat{O}C) = m(C\hat{O}B) = m(B\hat{O}D) = m(D\hat{O}A)$$

Nestas condições, as retas **r** e **s** são denominadas **retas perpendiculares** e são indicadas da seguinte forma: $r \perp s$ (lê-se: **r** perpendicular a **s**).

Cada um dos quatro ângulos assim determinados recebe o nome de **ângulo reto**.

$r \cap s = \{O\}$

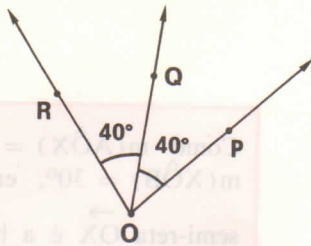
Então:

- Duas retas são perpendiculares quando se interceptam, determinando quatro ângulos congruentes.
- Ângulo reto é cada um dos quatro ângulos determinados por duas retas perpendiculares.

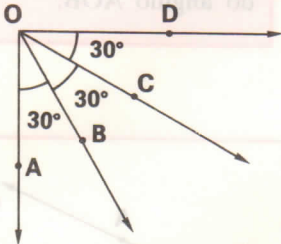
Você pode comprovar com o transferidor que a medida do ângulo reto é 90º.

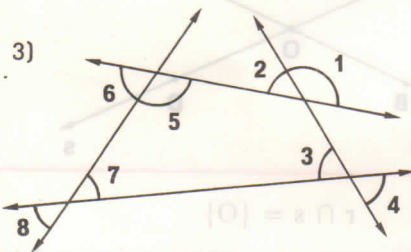
Logo, o ângulo reto mede 90º.

Complete as frases de acordo com as figuras:

1)

Os ângulos PÔQ e QÔR, PÔQ e PÔR, QÔR e PÔR são consecutivos.

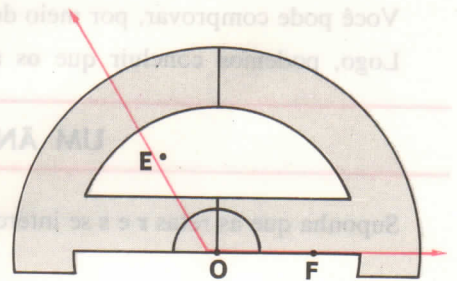
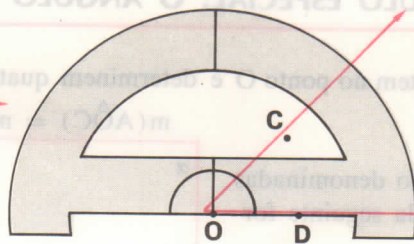
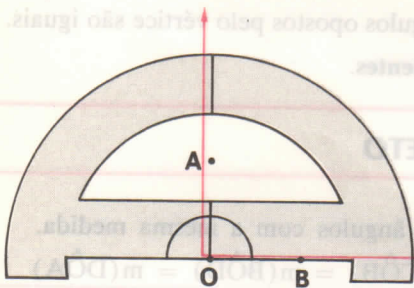
- Os ângulos PÔQ e QÔR são adjacentes.
- $\vec{OQ}$ é a bissetriz do ângulo PÔR.
- Os ângulos PÔQ e QÔR são congruentes, pois têm a mesma medida.

2)

- Os ângulos AÔB e BÔC, BÔC e CÔD são adjacentes.
- $\vec{OB}$ é a bissetriz do ângulo AÔC.
- $\vec{OC}$ é a bissetriz do ângulo BÔD.
- Os ângulos AÔB, BÔC e CÔD são congruentes, pois medem 30°.

3)

Dos ângulos indicados, podemos dizer que:

- Os ângulos 1 e 2, 5 e 6 são adjacentes.
- Os ângulos 3 e 4, 7 e 8 são o. p. v.

CLASSIFICAÇÃO DOS ÂNGULOS

Observe estes ângulos:

Agora complete:

m(AÔB) = 90°   m(CÔD) = 45°   m(EÔF) = 120°

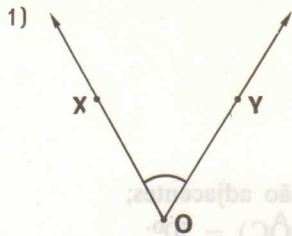
Pois bem, todo ângulo menor que o ângulo reto recebe o nome de **ângulo agudo**, e todo ângulo maior que o ângulo reto denomina-se **ângulo obtuso**.

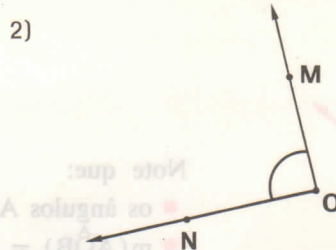
Então:

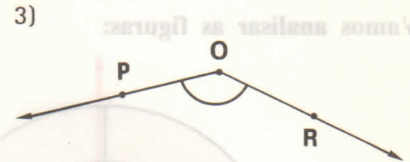
- AÔB é um ângulo reto;
- CÔD é um ângulo agudo;
- EÔF é um ângulo obtuso.

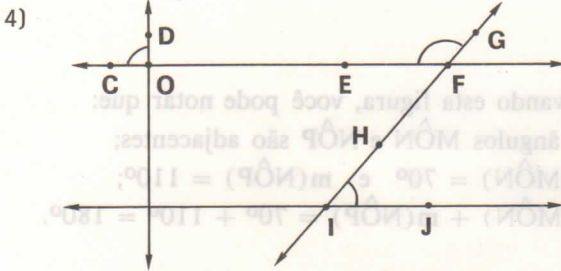
VAMOS EXERCITAR

Com o auxílio de um transferidor, determine a medida dos ângulos e classifique-os em agudo, obtuso ou reto:

1)

m(XÔY) = 60°. Logo, é um ângulo agudo.

2)

m(MÔN) = 90°. Logo, é um ângulo reto.

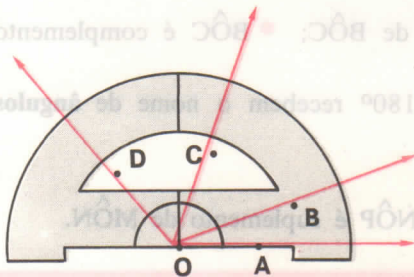
3)

m(PÔR) = 140°. Logo, é um ângulo obtuso

4)

m(EF̂G) = 130°. Logo, é um ângulo obtuso.

m(HÎJ) = 50°. Logo, é um ângulo agudo.

m(CÔD) = 90°. Logo, é um ângulo reto.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MEDIDAS DE ÂNGULOS

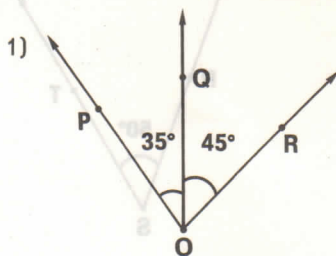
Analise a figura e, a seguir, complete as igualdades indicando as medidas dos ângulos:

m(AÔB) = 20°
m(BÔC) = 50°
m(AÔC) = 70°

Note que:
m(AÔB) + m(BÔC) = m(AÔC)
m(AÔB) = m(AÔC) − m(BÔC)

m(AÔC) = 70°
m(CÔD) = 60°
m(AÔD) = 130°

Note que:
m(AÔC) + m(CÔD) = m(AÔD)
m(AÔC) = m(AÔD) − m(CÔD)

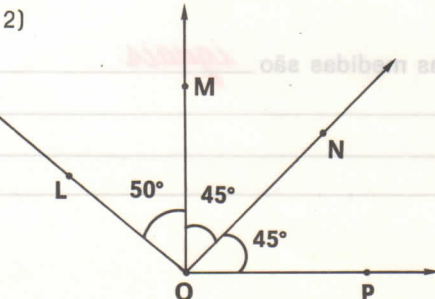
Complete as frases, baseando-se nas figuras:

1)

m(PÔQ) = 35°. Logo, é um ângulo agudo.

m(QÔR) = 45°. Logo, é um ângulo agudo.

m(PÔR) = 80°. Logo, é um ângulo agudo.

m(PÔQ) + m(QÔR) = m(PÔR)

2)

m(MÔP) = 90°. Logo, é um ângulo reto.

m(LÔP) = 140°. Logo, é um ângulo obtuso.

m(MÔP) = m(MÔN) + m(NÔP)

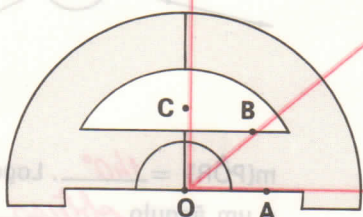
m(LÔP) − m(LÔM) = m(MÔP)

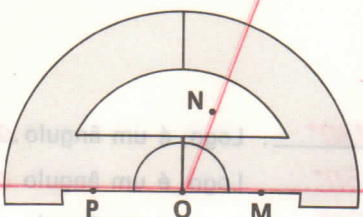
m(LÔP) − m(PÔN) = m(LÔN)

m(LÔN) − m(LÔM) = m(MÔN)

$\overrightarrow{ON}$ é a bissetriz do ângulo MÔP

ÂNGULOS COMPLEMENTARES E SUPLEMENTARES

Vamos analisar as figuras:

Note que:

- os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes;
- $m(A\hat{O}B) = 40^o$ e $m(B\hat{O}C) = 50^o$;
- $m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C) = 40^o + 50^o = 90^o$.

Observando esta figura, você pode notar que:

- os ângulos $M\hat{O}N$ e $N\hat{O}P$ são adjacentes;
- $m(M\hat{O}N) = 70^o$ e $m(N\hat{O}P) = 110^o$;
- $m(M\hat{O}N) + m(N\hat{O}P) = 70^o + 110^o = 180^o$.

Agora memorize o seguinte:

Dois ângulos, adjacentes ou não, cuja soma de suas medidas é igual a 90º recebem o nome de **ângulos complementares**, sendo que cada um deles denomina-se **complemento** do outro.

Então:

- $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são ângulos complementares; • $A\hat{O}B$ é complemento de $B\hat{O}C$; • $B\hat{O}C$ é complemento de $A\hat{O}B$.

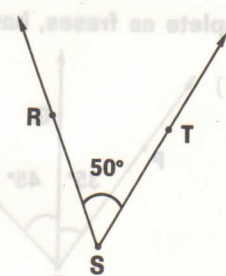
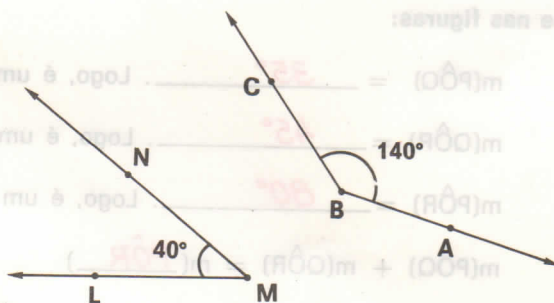
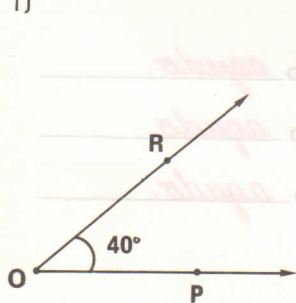
Dois ângulos, adjacentes ou não, cuja soma de suas medidas é igual a 180º recebem o nome de **ângulos suplementares**, sendo que cada um deles denomina-se **suplemento** do outro.

Então:

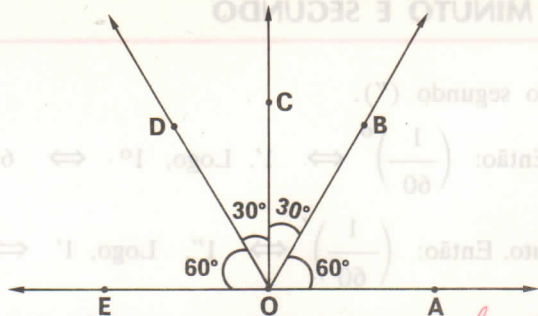
- $M\hat{O}N$ e $N\hat{O}P$ são suplementares; • $M\hat{O}N$ é suplemento de $N\hat{O}P$; • $N\hat{O}P$ é suplemento de $M\hat{O}N$.

VAMOS EXERCITAR

a) Responda de acordo com as figuras:

1)

- Os ângulos $P\hat{O}R$ e $L\hat{M}N$ são *congruentes*, pois as suas medidas são *iguais*
- Os ângulos $P\hat{O}R$ e $A\hat{B}C$ são *suplementares*
- Os ângulos $L\hat{M}N$ e $A\hat{B}C$ são *suplementares*
- Os ângulos $P\hat{O}R$ e $R\hat{S}T$ são *complementares*
- O ângulo $P\hat{O}R$ é *complemento* do ângulo $R\hat{S}T$.
- O ângulo $L\hat{M}N$ é *suplemento* do ângulo $A\hat{B}C$.
- Os ângulos *$P\hat{O}R$*, *$L\hat{M}N$* e *$R\hat{S}T$* são agudos.

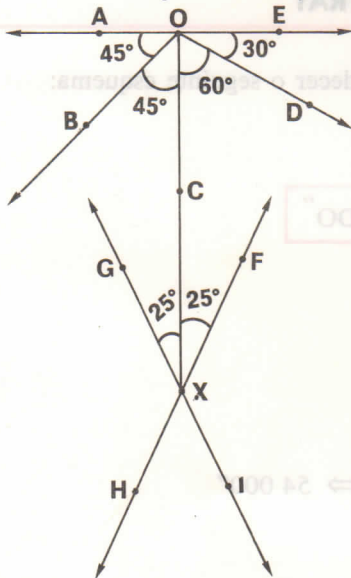
2)

- m(AÔC) = 90°. Portanto é um ângulo reto.
- m(BÔD) = 60°. Portanto é um ângulo agudo.
- m(AÔD) = 120°. Portanto é um ângulo obtuso.
- $\vec{OB}$ é a bissetriz do ângulo AÔD.
- $\vec{OC}$ é a bissetriz do ângulo BÔD.
- $\vec{OD}$ é a bissetriz do ângulo BÔE.

- Os ângulos AÔB e BÔC são complementares, pois a soma de suas medidas é 90°.
- Os ângulos AÔD e DÔE são suplementares, pois a soma de suas medidas é 180°.

b) Complete a tabela:

Medida de um ângulo	20°	55°	70°	45°	25°	80°	32°	18°	85°
Medida do complemento desse ângulo	70°	35°	20°	45°	65°	10°	58°	72°	5°
Medida do suplemento desse ângulo	160°	125°	110°	135°	155°	100°	148°	162°	95°

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Analise a figura e complete as frases (sem usar o transferidor):

1) Os ângulos AÔB e BÔC são complementares.
complementares/suplementares
2) Os ângulos CÔD e DÔE são complementares.
complementares/suplementares
3) Os ângulos BÔC e CÔD são adjacentes.
congruentes/adjacentes
4) Os ângulos GX̂F e HXI são o. p. v.
5) A bissetriz do ângulo GX̂F é $\vec{XC}$
6) $\vec{OB}$ é a bissetriz do ângulo AÔC.
7) O ângulo AÔC é reto, pois a sua medida é 90°.
reto/agudo/obtuso
8) O ângulo BÔE é obtuso, pois a sua medida é 135°.
9) O ângulo AÔB é complemento do ângulo BÔC e suplemento do ângulo BÔE.
10) A medida do ângulo HX̂I é 50°, pois ele é o. p. v. ao ângulo GX̂F.

b) Complete as sentenças:

1) Se um ângulo mede 17°, o seu complemento medirá 73°, enquanto o seu suplemento medirá 163°.
2) Dois ângulos o. p. v. são sempre congruentes.
3) Duas retas que determinam quatro ângulos adjacentes dois a dois e congruentes são denominadas retas perpendiculares, e cada um desses quatro ângulos recebe o nome de ângulo reto, cuja medida é 90°.
4) Ângulo agudo é todo ângulo cuja medida é menor que 90°.
5) Ângulo obtuso é todo ângulo cuja medida é maior que 90°.

SUBMÚLTIPLOS DO GRAU: MINUTO E SEGUNDO

As unidades submúltiplas do grau são o minuto (′) e o segundo (″).

- **Minuto**: é a unidade equivalente a $\frac{1}{60}$ do grau. Então: $\left(\frac{1}{60}\right)^{o} \Leftrightarrow 1'$. Logo, $1^{o} \Leftrightarrow 60'$.
- **Segundo**: é a unidade equivalente a $\frac{1}{60}$ do minuto. Então: $\left(\frac{1}{60}\right)' \Leftrightarrow 1''$. Logo, $1' \Leftrightarrow 60''$.

Deste modo, utilizando instrumentos com maior precisão, você poderá determinar as medidas dos ângulos em grau, minuto e segundo.

Exemplo:

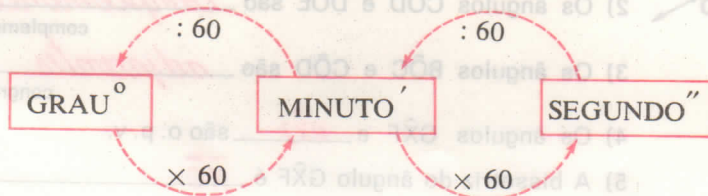
m(AÔB) = 27º12′35″ (Lê-se: A medida do ângulo AÔB é vinte e sete graus, doze minutos e trinta e cinco segundos.)

medida complexa

Dê a leitura de:

1) 30°10′15″ = trinta graus, dez minutos e quinze segundos.
2) 95°48′20″ = noventa e cinco graus, quarenta e oito minutos e vinte segundos.
3) 120°37′18″ = cento e vinte graus, trinta e sete minutos e dezoito segundos.
4) 48°50′40″ = quarenta e oito graus, cinqüenta minutos e quarenta segundos.
5) 59°30′15″ = cinqüenta e nove graus, trinta minutos e quinze segundos.

COMO CONVERTER UMA UNIDADE EM OUTRA?

Para você converter uma unidade de medida de ângulo em outra, basta obedecer o seguinte esquema:

Vejamos alguns exemplos:

1) Converta 15º em minutos e em segundos.

15º
15º × 60 = 900′

Então: 15º ⇔ 900′

15º
15º × 60 = 900′
900′ × 60 = 54 000″

Então: 15º ⇔ 54 000″

2) Converta 26º18′ em minutos e em segundos.

Então: 26º18′ ⇔ 1 578′
26º18′ ⇔ 94 680″

3) Converta 35º27′45″ em segundos.

Então: 35º27′45″ ⟺ 127 665″

VAMOS EXERCITAR

a) Converta em minutos:

1) 28° ⟺ 1680′
2) 35° ⟺ 2100′
3) 98° ⟺ 5880′
4) 36°19′ ⟺ 2179′
5) 120°43′ ⟺ 7243′
6) 80°14′ ⟺ 4814′
7) 15°50′ ⟺ 950′
8) 90°36′ ⟺ 5436′
9) 70°09′ ⟺ 4209′

b) Converta em segundos:

1) 12° ⟺ 43200″
2) 47° ⟺ 169200″
3) 42°42′ ⟺ 153720″
4) 17°15′ ⟺ 62100″
5) 23°38′ ⟺ 85080″
6) 95°50′ ⟺ 345000″
7) 16°25′30″ ⟺ 59130″
8) 39°48′54″ ⟺ 143334″
9) 105°03′13″ ⟺ 378193″

Vejamos outros exemplos.

1) Converta 960″ em minutos.

960″ ⟺ 16′

960″ ⌊60
360 16′
00″

2) Converta 2 300″ em minutos.

2 300″ ⟺ 38′ 20″

2 300″ ⌊60
500 38′
20″

3) Converta 75 600″ em graus.

75 600″ ⟺ 21º

75 600″ ⌊60
156 1 260′ ⌊60
360 060 21º
000″ 00′

4) Converta 1 200′ em graus.

1 200′ ⟺ 20º

1 200′ ⌊60
000′ 20º

5) Converta 2 512′ em graus.

2 512′ ⟺ 41º 52′

2 512′ ⌊60
112 41º
52′

6) Converta 80 000″ em graus.

VAMOS EXERCITAR

a) Converta em minutos:

1) 360″ ⟺ 6′
2) 450″ ⟺ 7′30″
3) 1 830″ ⟺ 30′30″
4) 2 700″ ⟺ 45′
5) 1 052″ ⟺ 17′32″
6) 1 380″ ⟺ 23′
7) 2 000″ ⟺ 33′20″
8) 3 500″ ⟺ 58′20″

b) Converta em graus:

1) 480' ⟺ 8°
2) 725' ⟺ 12°5'
3) 3 350' ⟺ 55°50'
4) 5 128' ⟺ 85°28'
5) 6 015' ⟺ 100°15'
6) 7 000' ⟺ 116°40'
7) 5 720" ⟺ 1°35'20"
8) 12 315" ⟺ 3°25'15"
9) 48 329" ⟺ 13°25'29"
10) 122 487" ⟺ 34°01'27"

OPERAÇÕES ENVOLVENDO MEDIDAS COMPLEXAS: ADIÇÃO

Adicionam-se separadamente os graus, minutos e segundos.

Observe os exemplos:

18° + 25°30'45" = ?	15°18' + 13°20'34" = ?	20°5' + 35°25" = ?	29°13'9" + 45°8'35" = ?
18° 25° 30' 45" + 43° 30' 45"	15° 18' 13° 20' 34" + 28° 38' 34"	20° 05' 35° 25" + 55° 05' 25"	29° 13' 09" 45° 08' 35" + 74° 21' 44"

Efetue as adições:

1) 35° + 48°13' = 83°13'
2) 48°12' + 52°38' = 100°50'
3) 27°15'40" + 32°38' = 59°53'40"
4) 85°5'18" + 15°25'8" = 100°30'26"
5) 121°12'36" + 19°40'14" = 140°52'50"
6) 39°15'40" + 40°25'12" = 79°40'52"
7) 12°18'24" + 13°15'26" = 25°33'50"
8) 14°32'41" + 6°18'9" = 20°50'50"
9) 75°17'38" + 4°13'12" = 79°30'50"
10) 50°30'11" + 21°25'14" = 71°55'25"

Veja estas adições:

35°48'27" + 47°6'43" = ?	16°49'15" + 23°31'20" = ?	18°50'38" + 20°28'32" = ?
35° 48' 27" 47° 06' 43" + 82° 54' 70" +1 −60 82° 55' 10"	16° 49' 15" 23° 31' 20" + 39° 80' 35" +1 −60 40° 20' 35"	18° 50' 38" 20° 28' 32" + 38° 78' 70" +1 −60 38° 79' 10" +1 −60 39° 19' 10"

Agora efetue:

1) 18°28'32" + 12°21'43" = 30°50'15"
2) 25°30'44" + 13°20'40" = 38°51'24"
3) 34°45'20" + 35°37'30" = 70°22'50"
4) 42°52'17" + 41°43'18" = 84°35'35"
5) 25°38'42" + 13°48'40" = 39°27'22"
6) 35°50'50" + 18°25'38" = 54°16'28"
7) 38°20'42" + 11°39'18" = 50°
8) 63°27'43" + 16°32'17" = 80°

SUBTRAÇÃO

Subtraem-se separadamente os graus, minutos e segundos.

Observe:

35°48' − 20°18' = ?	38°51'19" − 18°20'12" = ?
35° 48' 20° 18' − 15° 30'	38° 51' 19" 18° 20' 12" − 20° 31' 07"

Efetue estas subtrações:

1) 40°25' − 12°13' = 28° 12'
2) 85°48' − 27°24' = 58° 24'
3) 73°42'30" − 52°13'18" = 21° 29' 12"
4) 120°54'58" − 20°19'32" = 100° 35' 26"

Agora veja estas subtrações:

20° − 12°30' = ?

20°	?
− 12°	30'
?	

⟹ 20° 00' (−1, +60) → 19° 60'

Então: 20° ⟺ 19°60'

Logo:

19°	60'
− 12°	30'
7°	30'

35° − 10°18'20" = ?

35°	?	?
− 10°	18'	20"
?	?	

⟹ 35° 00' 00" (−1, +60) → 34° 60' (−1, +60) → 34° 59' 60"

Então: 35° ⟺ 34°59'60"

Logo:

34°	59'	60"
− 10°	18'	20"
24°	41'	40"

45°18'35" − 20°32'20" = ?

45°	18'	35"
− 20°	32'	20"
	?	

⟹ 45° 18' 35" (−1, +60) → 44° 78' 35"

Então: 45°18'35" ⟺ 44°78'35"

Logo:

44°	78'	35"
− 20°	32'	20"
24°	46'	15"

VAMOS EXERCITAR

Efetue:

1) 30° − 13°40' = 16° 20'
2) 54° − 18°20' = 35° 40'
3) 25°17' − 13°35' = 11° 42'
4) 84°23' − 41°52' = 42° 31'
5) 90° − 31°12'40" = 58° 47' 20"
6) 180° − 45°28'35" = 134° 31' 25"
7) 30°15'41" − 18°34'11" = 11° 41' 30"
8) 52°13'18" − 14°35'42" = 37° 37' 36"

MULTIPLICAÇÃO DE UMA MEDIDA COMPLEXA POR UM NÚMERO NATURAL

Multiplicam-se separadamente os graus, minutos e segundos pelo número natural.

Veja:

1) 12°10'13" × 4 = ?

12° 10' 13"
× 4
48° 40' 52"

2) 15°20'35" × 3 = ?

15° 20' 35"
× 3
45° 60' 105"
(+1, −60)
45° 61' 45"
(+1, −60)
46° 01' 45"

3) 16°30'38" × 5 = ?

16° 30' 38"
× 5
80° 150' 190"
(+3, −180)
80° 153' 10"
(+2, −120)
82° 33' 10"

Efetue:

1) 25°12' × 4 = 100° 48'
2) 26°12' × 5 = 131°
3) 13°20'18" × 3 = 40° 00' 54"
4) 14°32'25" × 3 = 43° 37' 15"
5) 21°18'15" × 6 = 127° 49' 30"
6) 18°12'30" × 5 = 91° 02' 30"

DIVISÃO DE UMA MEDIDA COMPLEXA POR UM NÚMERO NATURAL

Dividem-se separadamente os graus, minutos e segundos pelo número natural.

Observe os exemplos:

1) 36°16'9" : 3 = ?

36° 16' 09" | 3
06 1' 60" 12°5'23"
0 69"
09
0

2) 19°13'10" : 2 = ?

19° 13' 10" | 2
1° 60' 9°36'35"
73'
13
1' 60"
70"
10
0

Com base no dispositivo da divisão, efetue:

1) 12°31'14" : 2 = 6°15'37"
2) 69°53'08" : 4 = 17°28'17"
3) 154°17'06" : 6 = 25°42'51"
4) 45°37'42" : 3 = 15°12'34"
5) 57°39'10" : 7 = 8°14'10"
6) 46°17'05" : 5 = 9°15'25"

DESENVOLVA SUA CRIATIVIDADE

Como você procederia para encontrar o quociente de:

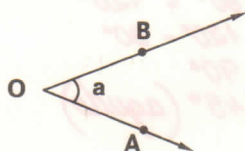
1) 7°49'20" : 58'40" = ? (8)
2) 14°23'12" : 2°23'52" = ? (6)

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Complete a tabela:

Medida de um ângulo	**30°16'**	**52°28'**	**37°20'56"**	**80°10'32"**	**8°17'48"**	**13°41'**
Medida do complemento desse ângulo	59°44'	37°32'	52°39'04"	9°49'28"	81°42'12"	76°19'
Medida do suplemento desse ângulo	149°44'	127°32'	142°39'04"	99°49'28"	171°42'12"	166°19'
O triplo da medida desse ângulo	90°48'	157°24'	112°02'48"	240°31'36"	24°53'24"	41°03'
A quarta parte da medida desse ângulo	7°34'	13°7'	9°35'14"	20°02'38"	2°04'27"	3°25'15"
Soma da medida desse ângulo com 25°30'15"	55°46'15"	77°58'15"	62°51'11"	105°40'47"	33°48'03"	39°11'15"
A metade da medida desse ângulo	15°08'	26°14'	18°40'28"	40°05'16"	4°08'54"	6°50'
A soma da medida desse ângulo com 5°12'	35°28'	57°40'	42°32'56"	85°22'32"	13°29'48"	18°53'

UMA APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES NA GEOMETRIA

Vamos inicialmente recordar as linguagens comum e matemática de uma sentença.

$m(A\hat{O}B) = a$

Admitindo-se que a medida em graus de um ângulo $A\hat{O}B$ seja a, passe para a linguagem matemática as sentenças:

1) O dobro da medida em graus do ângulo $A\hat{O}B$. $2a$

2) A terça parte da medida em graus do ângulo $A\hat{O}B$. $\frac{a}{3}$

3) O quíntuplo da medida em graus do ângulo $A\hat{O}B$. $5a$

4) Adicionando 20° à medida em graus do ângulo $A\hat{O}B$, obtemos 80°. $a + 20° = 80°$

5) Subtraindo 40° da medida em graus do ângulo $A\hat{O}B$, obtemos 20°. $a - 40° = 20°$

6) Subtraindo 10° da terça parte da medida em graus do ângulo $A\hat{O}B$, obtemos 10°. $\frac{a}{3} - 10° = 10°$

7) A medida em graus do complemento do ângulo $A\hat{O}B$. $90° - a$

8) A medida em graus do suplemento do ângulo $A\hat{O}B$. $180° - a$

9) A quinta parte da medida em graus do complemento do ângulo $A\hat{O}B$. $\frac{90° - a}{5}$

10) O quádruplo da medida em graus do suplemento do ângulo $A\hat{O}B$. $4(180° - a)$

Vamos resolver alguns problemas:

1) Adicionando 20° à medida em graus de um ângulo, obtemos 90°. Qual é a medida desse ângulo?

Linguagem matemática	**Resolução**
medida: x	$x + 20° = 90°$
$x + 20° = 90°$	$x = 90° - 20°$
	$\boxed{x = 70°}$

R.: A medida do ângulo é 70°.

2) Adicionando 12° à medida em graus de um ângulo, obtemos 122°. Determine a medida desse ângulo.

Linguagem matemática	**Resolução**
medida: x	$x + 12° = 122°$
$x + 12° = 122°$	$x = 122° - 12°$
	$x = 110°$

R.: 110°.

3) Subtraindo 45° da medida em graus de um ângulo, obtemos 35°. Descubra a medida desse ângulo.

Linguagem matemática	**Resolução**
medida: x	$x - 45° = 35°$
$x - 45° = 35°$	$x = 35° + 45°$
	$x = 80°$

R.: 80°.

4) Adicionando 30° ao dobro da medida em graus de um ângulo, obtemos 120°. Descubra se este ângulo é reto, agudo ou obtuso.

Linguagem matemática

medida: x

$2x + 30° = 120°$

Resolução

$2x + 30° = 120°$

$2x = 120° - 30°$

$2x = 90°$

$x = 45°$ (agudo)

R.: Agudo.

5) Determine a medida de um ângulo, sabendo que ela é igual à terça parte da medida do seu complemento.

Linguagem matemática

medida do ângulo: x

medida do complemento: 90 − x

$$x = \frac{90 - x}{3}$$

R.: 22,5° ou 22°30'.

Resolução

$$x = \frac{90 - x}{3}$$

$3x = 90 - x$

$3x + x = 90 \Longrightarrow 4x = 90 \Longrightarrow x = 22{,}5$

6) Calcule a medida de um ângulo, sabendo que ela é igual à metade da medida do seu complemento.

Linguagem matemática

ângulo: x

complemento: $90 - x$

$$x = \frac{90 - x}{2}$$

Resolução

$$x = \frac{90 - x}{2}$$

$2x = 90 - x$

$2x + x = 90 \Longrightarrow 3x = 90 \Longrightarrow x = 30$

R.: 30°.

7) Subtraindo da medida de um ângulo o dobro da medida do seu complemento, obtemos 30°. Qual é a medida desse ângulo?

Linguagem matemática

ângulo: x

complemento: $90 - x$

$x - 2(90 - x) = 30°$

Resolução

$x - 2(90 - x) = 30$

$x - 180 + 2x = 30$

$x + 2x = 30 + 180$

$3x = 210 \Longrightarrow x = 70$

R.: 70°.

8) A medida de um ângulo excede em 60° a medida de seu complemento. Qual é a medida em graus desse ângulo?

Linguagem matemática

ângulo: x

complemento: $90 - x$

$x = (90 - x) + 60°$

Resolução

$x = 90 - x + 60$

$x + x = 90 + 60$

$2x = 150$

$x = 75$

R.: 75°.

9) A medida de um ângulo é igual ao dobro da medida de seu suplemento. Determine a medida em graus desse ângulo.

Linguagem matemática

medida do ângulo: x

medida do suplemento: 180 − x

$x = 2(180 - x)$

Resolução

$x = 2(180 - x)$

$x = 360 - 2x$

$x + 2x = 360$

$3x = 360 \Longrightarrow x = 120$

R.: 120°.

10) A medida de um ângulo é igual à terça parte da medida de seu suplemento. Qual é a medida desse ângulo?

Linguagem matemática

ângulo: x

suplemento: $180 - x$

$x = \frac{180 - x}{3}$

Resolução

$x = \frac{180 - x}{3}$

$3x = 180 - x$

$3x + x = 180 \Longrightarrow 4x = 180 \Longrightarrow x = 45$

R.: 45°.

11) A diferença entre o dobro da medida de um ângulo e a medida de seu suplemento é igual a 60°. Calcule a medida em graus desse ângulo.

Linguagem matemática

ângulo: x

suplemento: $180 - x$

$2x - (180 - x) = 60°$

Resolução

$2x - (180 - x) = 60$

$2x - 180 + x = 60$

$2x + x = 60 + 180$

$3x = 240 \Longrightarrow x = 80$

R.: 80°.

12) A medida do suplemento de um ângulo excede em 10° o triplo da medida do complemento desse ângulo. Qual é a medida do ângulo?

Linguagem matemática

medida do ângulo: x

medida do suplemento: $180 - x$

medida do complemento: $90 - x$

$180 - x = 3(90 - x) + 10$

Resolução

$180 - x = 3(90 - x) + 10$

$180 - x = 270 - 3x + 10$

$-x + 3x = 270 + 10 - 180$

$2x = 100 \Longrightarrow x = 50$

R.: 50°.

13) Adicionando à medida do complemento de um ângulo a medida do suplemento desse ângulo, obtemos 210°. Determine a medida do ângulo.

Linguagem matemática

ângulo: x

complemento: $90 - x$

suplemento: $180 - x$

$90 - x + 180 - x = 210$

Resolução

$90 - x + 180 - x = 210$

$-x - x = 210 - 90 - 180$

$-2x = -60$

$x = 30$

R.: 30°.

14) Adicionando à medida do complemento de um ângulo a quinta parte da medida de seu suplemento, obtemos 48°. Calcule a medida em graus desse ângulo.

Linguagem matemática

ângulo: x

complemento: $90 - x$

suplemento: $180 - x$

$90 - x + \frac{180 - x}{5} = 48$

Resolução

$90 - x + \frac{180 - x}{5} = 48$

$450 - 5x + 180 - x = 240$

$-5x - x = 240 - 450 - 180$

$-6x = -390 \Rightarrow x = 65$

R.: 65°

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Resolva:

1) Subtraindo 20° da metade da medida em graus de um ângulo, obtemos 15°. Qual é a medida desse ângulo? (70°)

2) A medida de um ângulo é o triplo da medida de outro. Determine essas medidas, sabendo que a soma delas é igual a 160°. Classifique esses ângulos em agudo, obtuso ou reto. (40° e 120°, agudo e obtuso)

3) A medida de um ângulo é 25°30'45". Qual é a medida do seu complemento? E do seu suplemento?
(64°29'15" e 154°29'15")

4) A medida de um ângulo é a terça parte da medida de outro. Sabendo que esses ângulos são complementares, qual é a medida de cada um?
(22°30' e 67°30')

5) A medida de um ângulo excede a de outro em 15°. Calcule a medida de cada um, sabendo que eles são complementares.
(37°30' e 52°30')

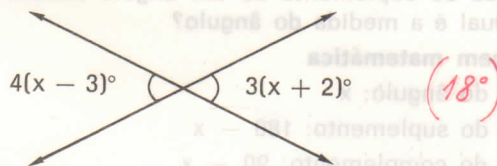
6) Subtraindo 20° da medida do suplemento de um ângulo, obtemos a medida desse ângulo. Qual é a medida do complemento desse mesmo ângulo?
(10°)

7) A medida do suplemento de um ângulo é igual ao triplo da medida de seu complemento. Descubra a medida desse ângulo.
(45°)

8) As medidas em graus de dois ângulos são expressas por **x** e **3x + 10°**. Determine essas medidas, sabendo que esses ângulos são complementares.
(20° e 70°)

9) Descubra as medidas de dois ângulos o.p.v., sabendo que essas medidas são expressas em graus por 2x − 30° e x + 10°. (50° e 50°)

10) De acordo com a figura, determine o valor de **x**.

(18°)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Resolva:

1) A medida de um ângulo é 60°30'15". Descubra a terça parte da medida do complemento desse ângulo.
(6°49'55")

2) A medida de um ângulo é 151°35'20". Qual é a metade da medida do suplemento desse ângulo?
(14°12'20")

3) Adicionando 9° ao triplo da medida em graus de um ângulo, obtemos a medida de seu complemento. Qual é a medida desse ângulo? (20°15')

4) A razão entre a medida de um ângulo e a de seu suplemento é $\frac{1}{5}$. Descubra a medida desse ângulo. (30°)

5) Determine as medidas de dois ângulos complementares, sabendo que elas são expressas em graus por 3x + 15° e 4x + 5°. (45° e 45°)

6) Qual deve ser o valor de **x** para que as expressões (5x − 20) e (2x + 28) expressem as medidas de dois ângulos opostos pelo vértice? (16°)

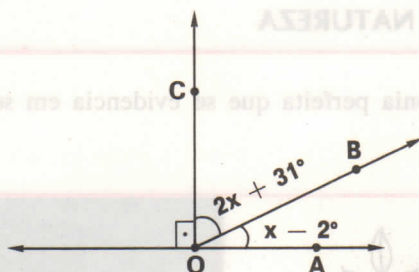
7) As expressões (3x − 10) e (2x + 10) expressam as medidas em graus de dois ângulos. Qual deve ser o valor de **x** para que esses ângulos sejam:

a) opostos pelo vértice; (20°) b) complementares; (18°) c) suplementares. (36°)

8) Determine a medida de um ângulo, sabendo que o dobro da medida do seu complemento é 116°15'24".
(31°52'18")

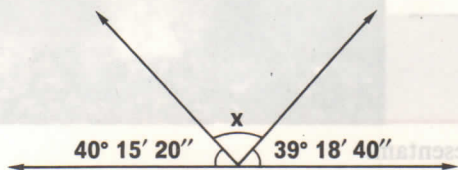
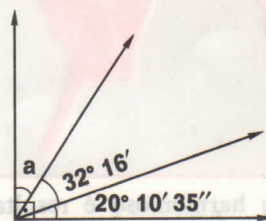
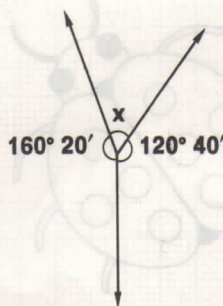
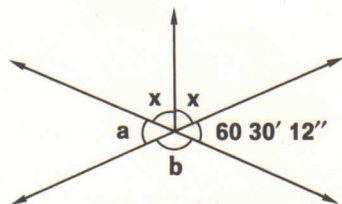
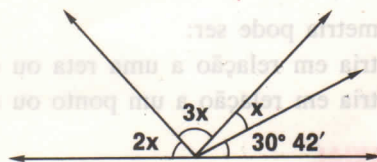
9) Determine a medida de um ângulo, sabendo que a terça parte da medida de seu complemento é 22°17'15".
(23°08'15")

10) Descubra a medida de um ângulo, sabendo que subtraindo 8° da quinta parte da medida de seu suplemento, obtemos a terça parte da medida de seu complemento. (15°)

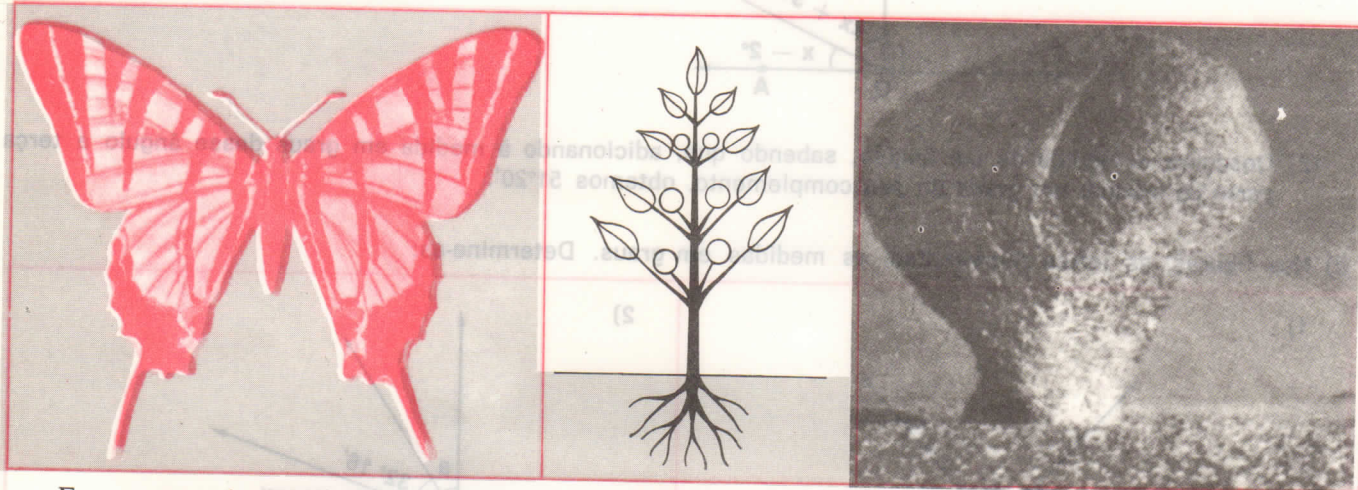
11) Determine as medidas dos ângulos AÔB e BÔC, sabendo que são expressas em graus por x − 2° e 2x + 31°.

12) Descubra a medida de um ângulo, sabendo que, adicionando à medida em graus desse ângulo a terça parte da medida em graus do seu complemento, obtemos 51°20'. (32°)

b) Nas figuras, as letras representam as medidas em graus. Determine-as:

1) x; 40° 15′ 20″; 39° 18′ 40″ — (100° 26')	2) a; 32° 16′; 20° 10′ 35″ — (37° 33' 25")
3) a; a — (45°)	4) x; 160° 20′; 120° 40′ — (79°)
5) x; x; a; 60 30′ 12″; b — a = 60° 30' 12"; b = 119° 29' 48"; x = 59° 44' 54"	6) 3x; x; 2x; 30° 42′ — (24° 53')

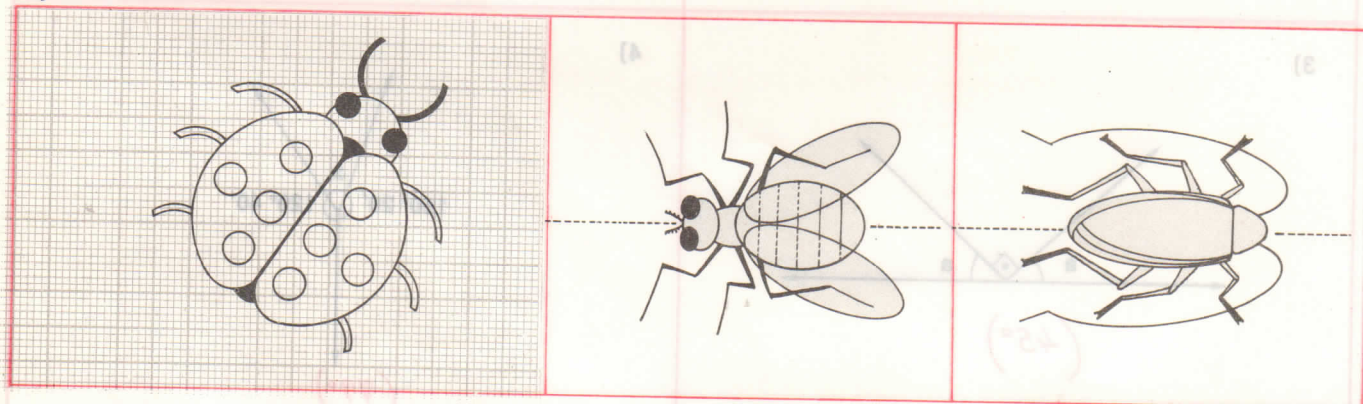
ESTUDO DAS SIMETRIAS E DA TRANSLAÇÃO

A ARTE E A NATUREZA

Muitas vezes contemplamos admirados a harmonia perfeita que se evidencia em seres e objetos, moldada pelo homem ou então pela natureza.

Observe:

Esse aspecto harmonioso é resultado da **simetria** que apresentam.

Mas o que é simetria?

É a propriedade que nos permite dar disposição aos elementos de uma figura, de modo a observarmos um certo equilíbrio na forma, no tamanho ou no arranjo de suas partes.

Veja:

A SIMETRIA

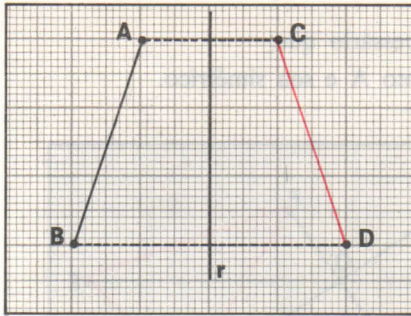
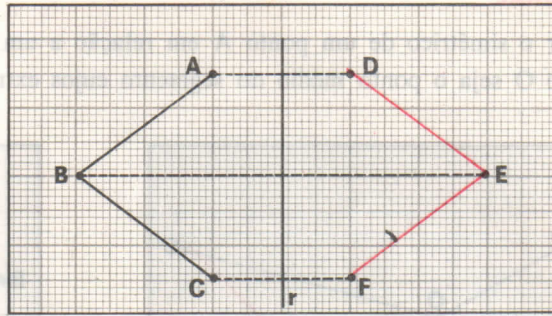
Uma simetria pode ser:

- simetria em relação a uma reta ou eixo: simetria axial;
- simetria em relação a um ponto ou centro: simetria central.

SIMETRIA AXIAL

Para obter o simétrico de um ponto A em relação a uma reta **r**, é necessário que:

- o ponto A e seu simétrico se situem em semiplanos opostos em relação à reta **r**;
- o segmento, cujos extremos são o ponto A e seu simétrico, seja perpendicular à reta r;
- a distância do ponto A à reta **r** seja igual à distância do simétrico de A à reta **r**.

Observe:

Em relação a **r** tem-se:

- o simétrico de A é C;
- o simétrico de B é D.

Então:

- o simétrico de $\overline{AB}$ é $\overline{CD}$.

Em relação a **r** tem-se:

- o simétrico de A é D;
- o simétrico de B é E;
- o simétrico de C é F.

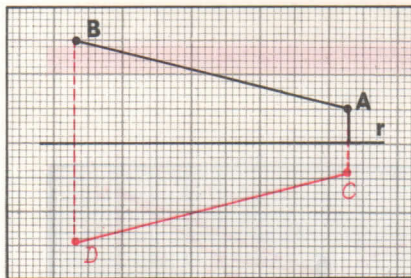
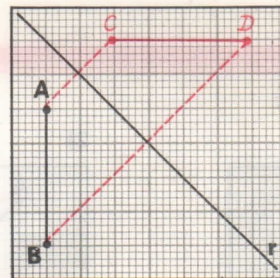
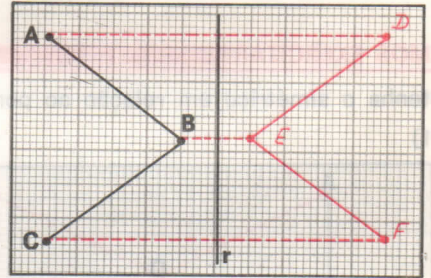
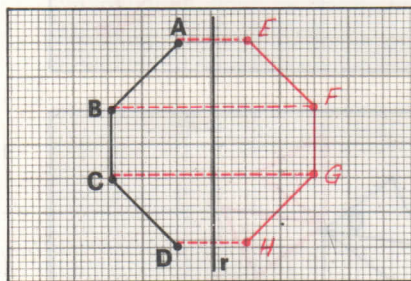
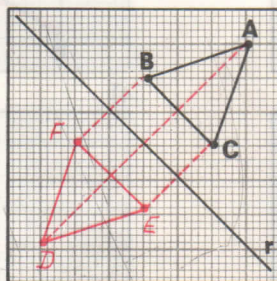
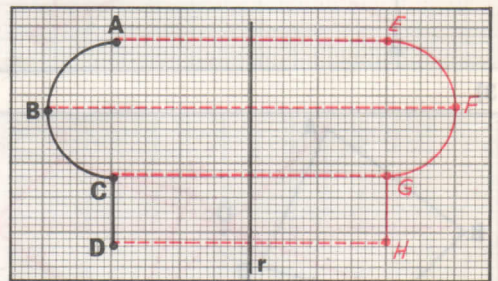
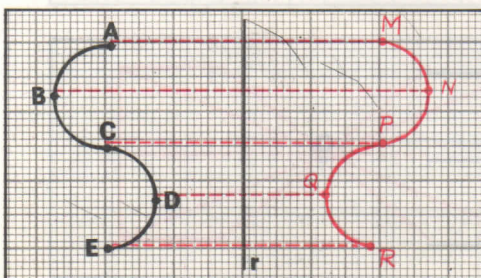
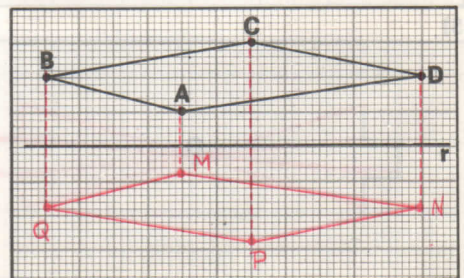
Então:

- o simétrico da poligonal ABC é a poligonal DEF.

A reta **r** recebe o nome de **eixo de simetria**.

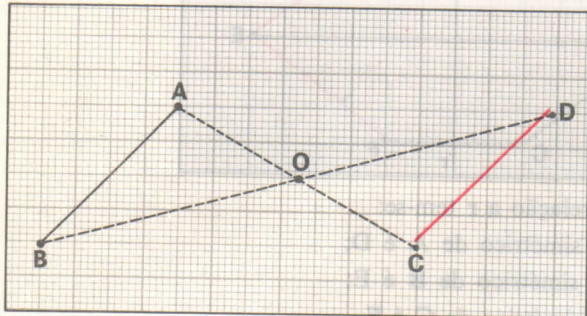
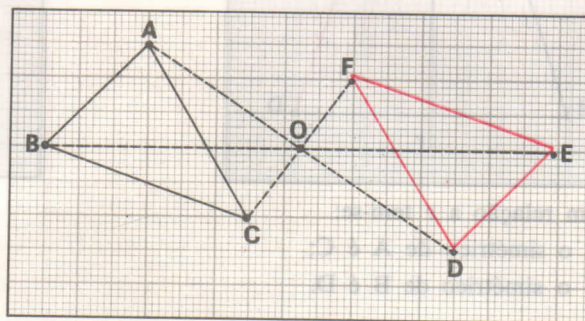
VAMOS EXERCITAR

Trabalhando com régua, compasso e esquadro, obtenha o simétrico em relação a **r**:

1)

2)

3)

4)

5)

6)

7)

8)

SIMETRIA CENTRAL

Para obter o simétrico de um ponto A em relação a um ponto O, é necessário que:

- o ponto O seja o ponto médio do segmento cujos extremos são o ponto A e seu simétrico.

Observe:

Em relação ao ponto O tem-se:

- o simétrico de A é C;
- o simétrico de B é D.

Então:

- o simétrico de $\overline{AB}$ é $\overline{CD}$.

Em relação ao ponto O tem-se:

- o simétrico de A é D;
- o simétrico de B é E;
- o simétrico de C é F.

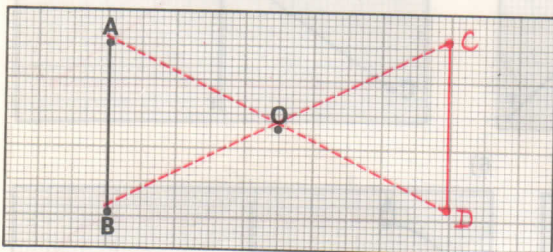
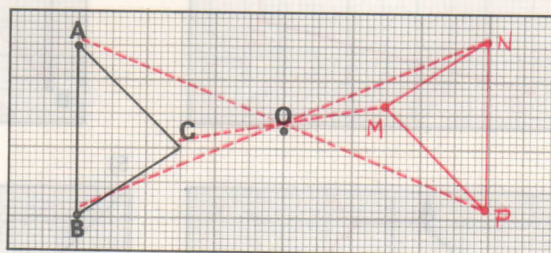
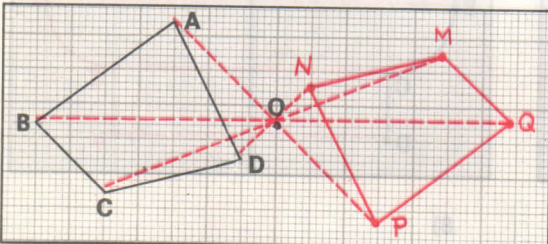
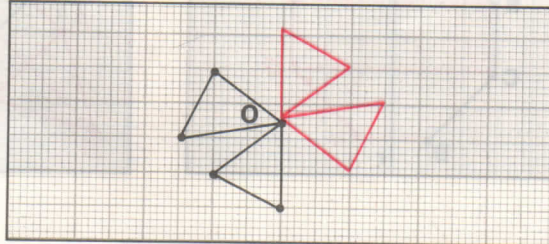
Então:

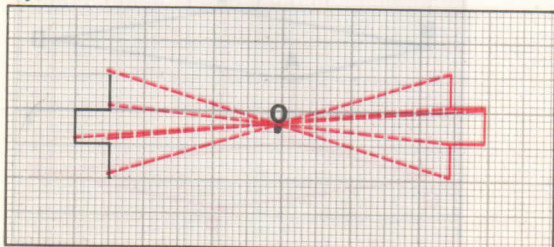
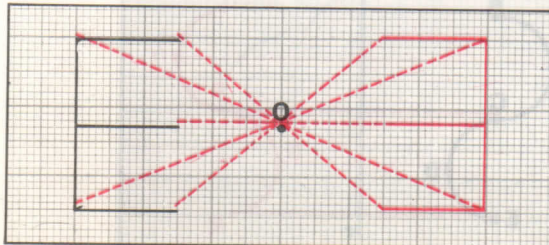
- o simétrico do triângulo ABC é o triângulo DEF.

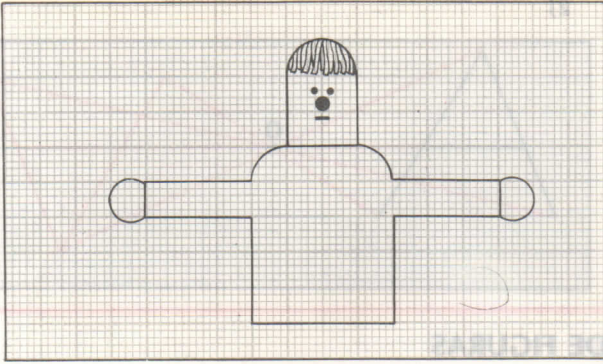
O ponto O recebe o nome de **centro de simetria**.

VAMOS EXERCITAR

Obtenha o simétrico em relação ao ponto O:

1)

2)

3)

4)

5)

6)

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Observe a figura:

Agora, complete adequadamente:

1) O simétrico do ponto A é o ponto ________

2) O simétrico do ponto B é o ponto R.

3) O simétrico do ponto D é o ponto M.

4) O simétrico do ponto C é o ponto S.

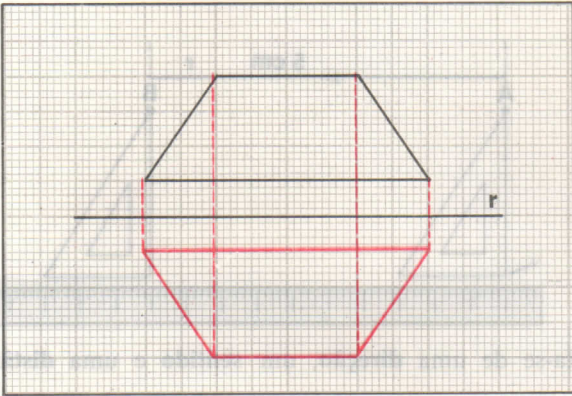
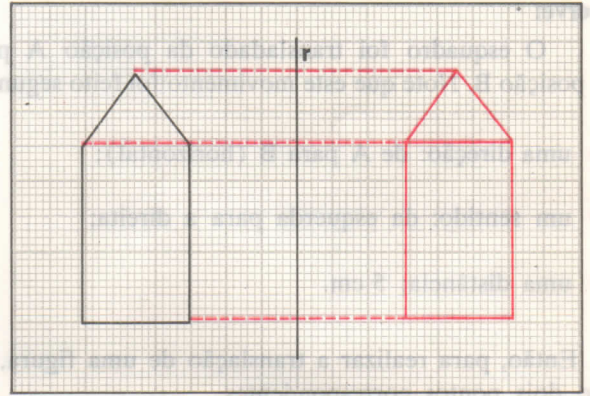
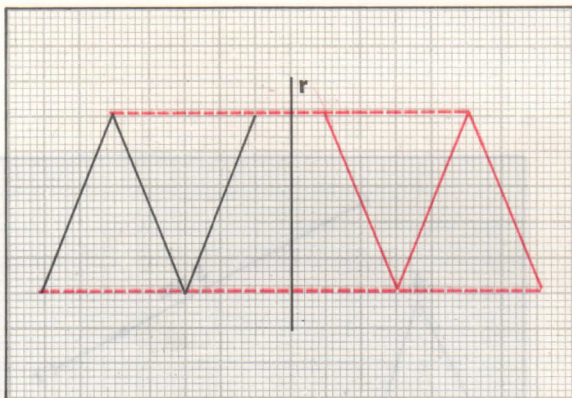
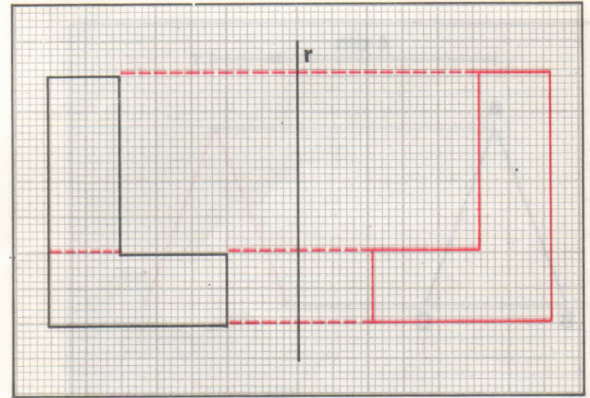
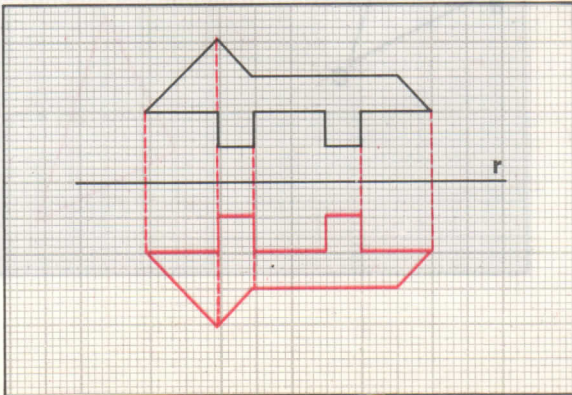
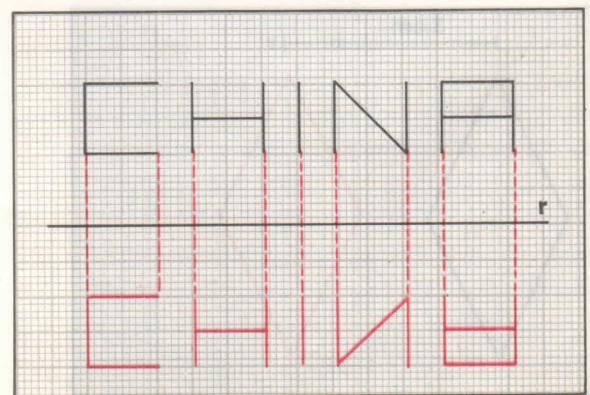
5) O simétrico do segmento $\overline{BC}$ é o segmento $\overline{RS}$.

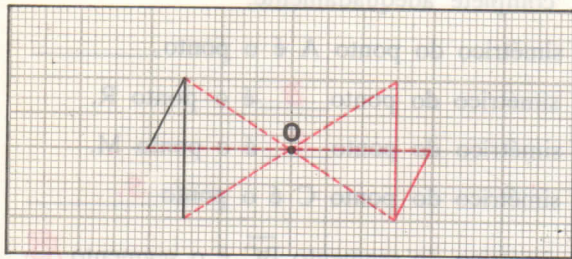
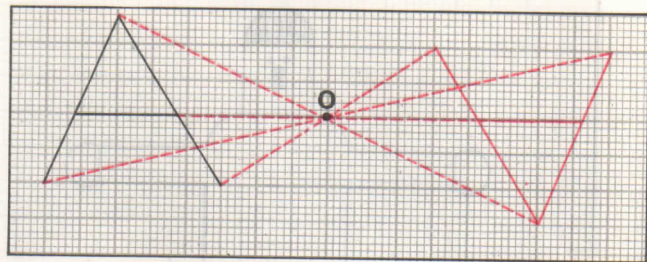
6) O simétrico do arco $\widehat{AD}$ é o arco $\widehat{NM}$.

b) Obtenha o simétrico das figuras, em relação à reta **r**:

1)

2)

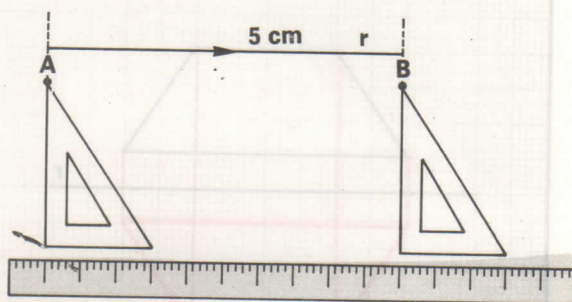
r

3)

4)

5)

6)

c) Obtenha o simétrico das figuras, em relação ao ponto O:

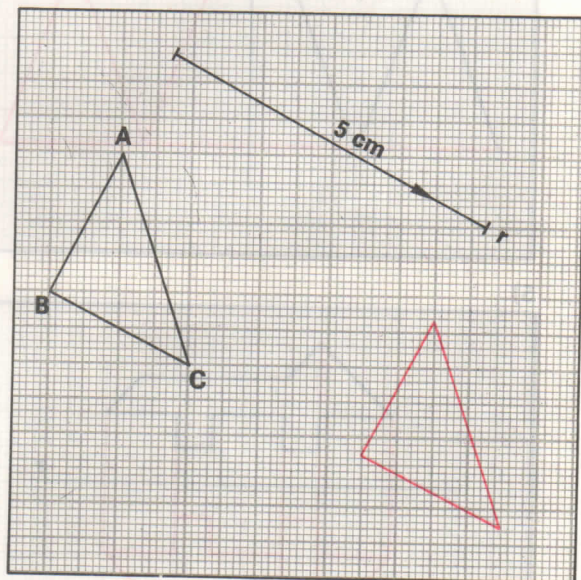
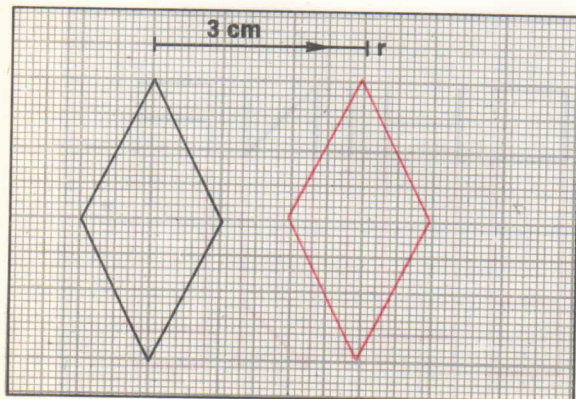
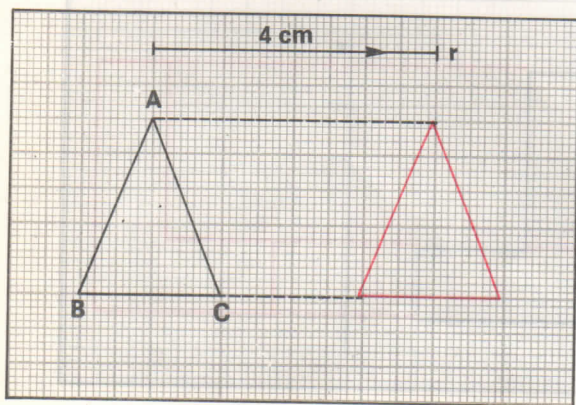
1)

2)

A TRANSLAÇÃO DE FIGURAS

Quando você faz deslizar um esquadro ao longo de uma régua fixa, conservando uma das margens do esquadro constantemente apoiada na régua, você concretiza um movimento de translação.

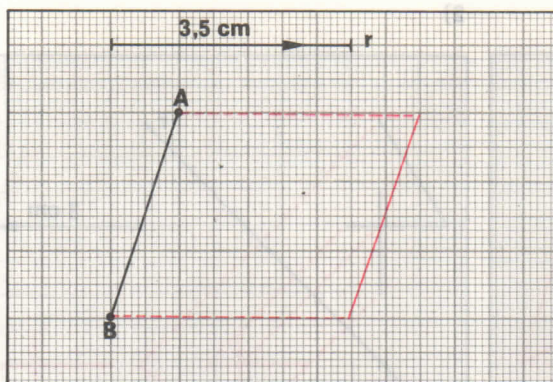
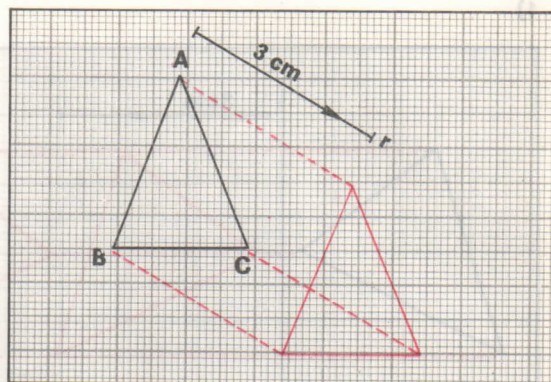
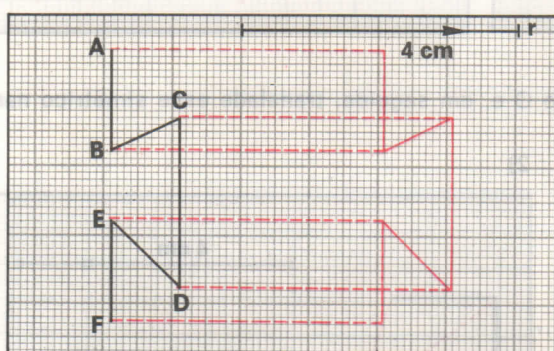
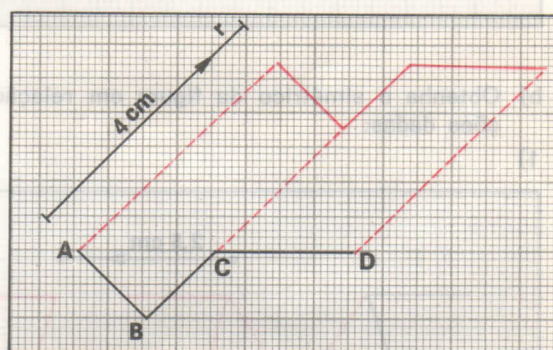
Observe:

O esquadro foi transladado da posição A para a posição B. Note que este movimento foi feito segundo:

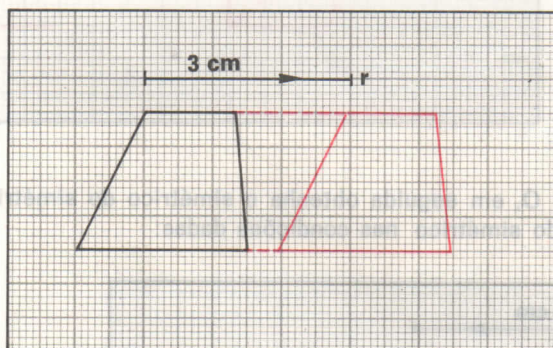
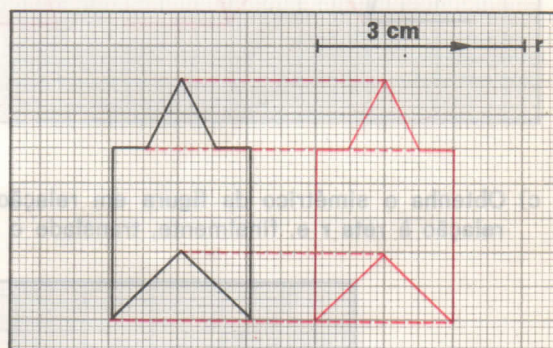
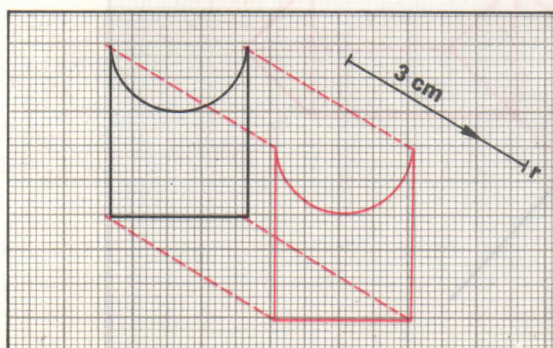
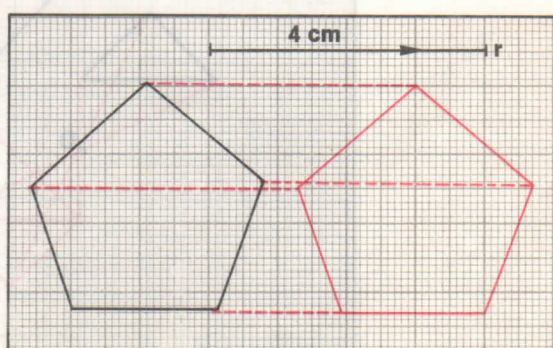
- uma direção: de A para B (horizontal);
- um sentido: da esquerda para a direita;
- uma distância: 5 cm.

Então, para realizar a translação de uma figura, necessita-se de uma **direção**, um **sentido** e uma **distância** entre dois pontos correspondentes.

Veja a translação das figuras segundo o segmento **r**:

VAMOS EXERCITAR

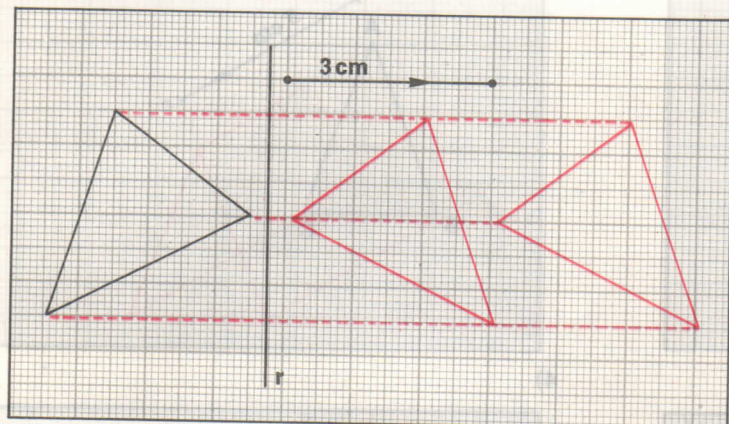
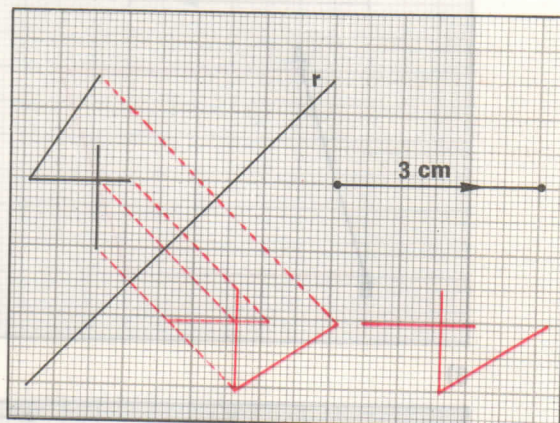
Translade a figura segundo o segmento **r**:

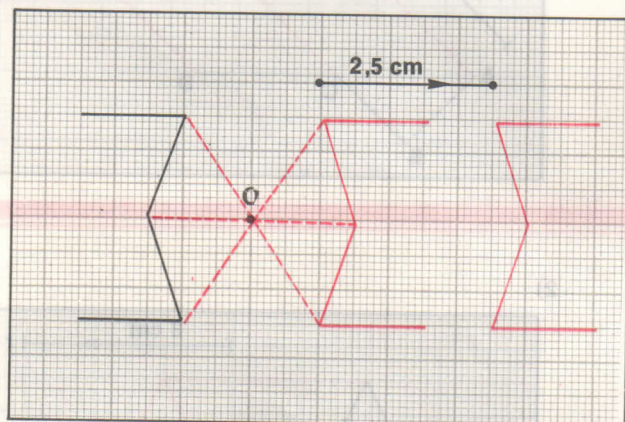
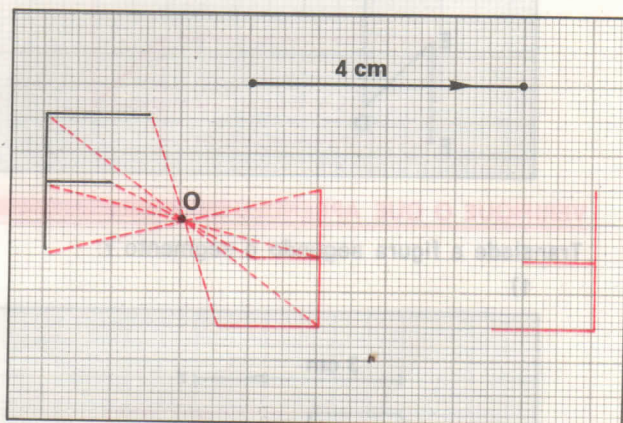
1)

2)

3)

4)

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

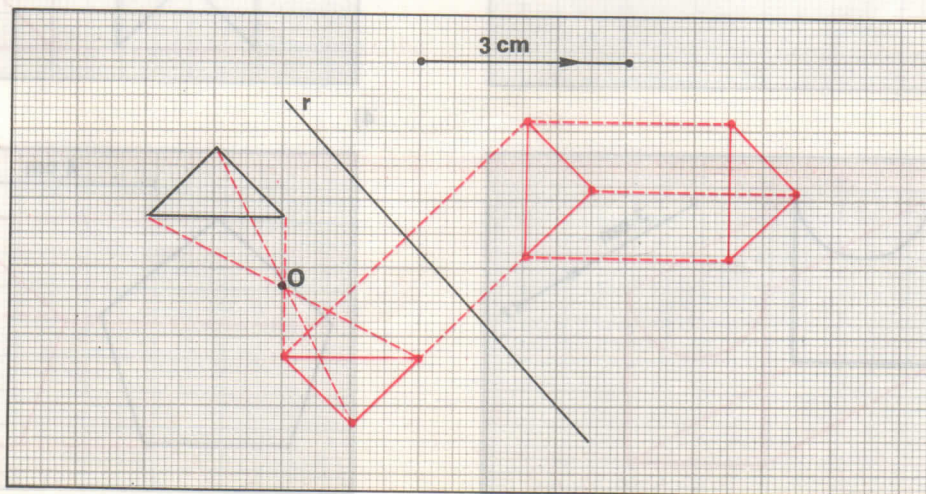
Translade a figura segundo o segmento **r**:

1)

2)

3)

4)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Obtenha o simétrico da figura em relação à reta **r** e, em seguida, translade esse simétrico nas condições dadas:

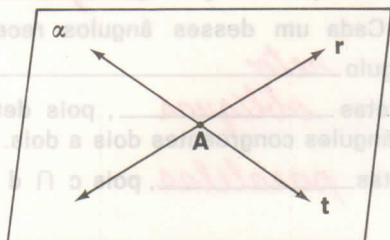
1)

2)

b) Obtenha o simétrico da figura em relação ao ponto O e, em seguida, translade esse simétrico nas condições dadas:

1)

2)

c) Obtenha o simétrico da figura em relação ao ponto O, em seguida obtenha o simétrico do simétrico em relação à reta **r** e, finalmente, translade o simétrico do simétrico nas condições dadas:

ÂNGULOS DETERMINADOS POR DUAS PARALELAS E UMA TRANSVERSAL

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS COPLANARES

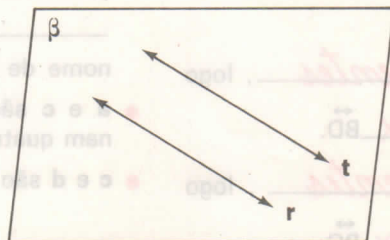
Duas retas coplanares assumem uma das seguintes posições:

• **concorrentes**: quando apresentam somente um ponto comum; • **paralelas**: quando não apresentam nenhum ponto comum; • **coincidentes**: quando apresentam todos os pontos comuns.

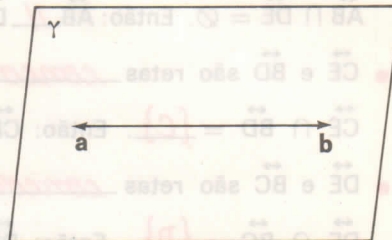
Observe as figuras:

$r \subset \alpha$, $t \subset \alpha$ $\Longrightarrow$ **r** e **t** são coplanares

$r \cap t = \{A\} \Longrightarrow$ **r** e **t** são concorrentes

Indicação: $r \times t$

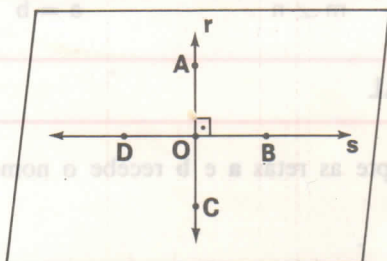
$r \subset \beta$, $t \subset \beta$ $\Longrightarrow$ **r** e **t** são coplanares

$r \cap t = \varnothing \Longrightarrow$ **r** e **t** são paralelas

Indicação: $r \mathbin{/\!/} t$

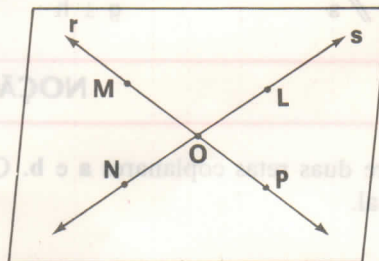
$a \subset \gamma$, $b \subset \gamma$ $\Longrightarrow$ **a** e **b** são coplanares

$a \cap b = a = b \Longrightarrow$ **a** e **b** são coincidentes

Indicação: $a = b$

Agora observe o seguinte:

Duas retas concorrentes que determinam quatro ângulos congruentes são denominadas retas perpendiculares; em caso contrário, são denominadas retas oblíquas.

$m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}D) = m(D\hat{O}C) =$
$= m(C\hat{O}B) = 90°$

r e **s** são perpendiculares.

Indicação: $r \perp s$

$m(M\hat{O}L) = m(N\hat{O}P) \neq m(M\hat{O}N) = m(L\hat{O}P)$

r e **s** são oblíquas.

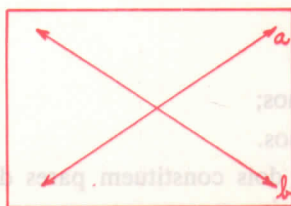
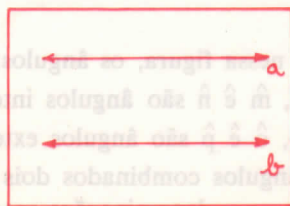
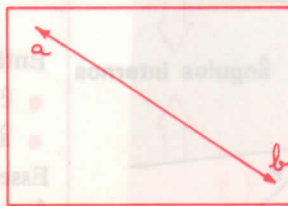
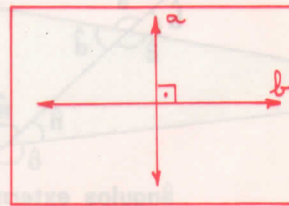
Indicação: r ⊿ s

EXERCÍCIOS

a) Trace duas retas **a** e **b** nas seguintes posições:

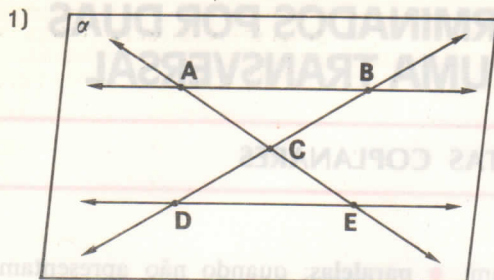
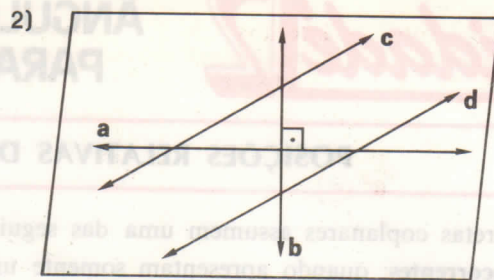
1) oblíquas — Indicação: a ⊿ b

2) paralelas — Indicação: a // b

3) coincidentes — Indicação: a = b

4) perpendiculares — Indicação: a ⊥ b

b) Complete, conforme as figuras:

1)

2)

a
c
d
b

- $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são retas *paralelas*, pois $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE} = \varnothing$. Então: $\overleftrightarrow{AB}$ *//* $\overleftrightarrow{DE}$.
- $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são retas *concorrentes*, logo $\overleftrightarrow{CE} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{C\}$. Então: $\overleftrightarrow{CE}$ *×* $\overleftrightarrow{BD}$.
- $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são retas *concorrentes*, logo $\overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{D\}$. Então: $\overleftrightarrow{DE}$ *×* $\overleftrightarrow{BC}$.
- $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são retas *concorrentes*, logo $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{B\}$. Então: $\overleftrightarrow{AB}$ *×* $\overleftrightarrow{CD}$.

- **a** e **b** são retas *perpendiculares* pois determinam quatro ângulos *congruentes*. Cada um desses ângulos recebe o nome de ângulo *reto*
- **a** e **c** são retas *oblíquas*, pois determinam quatro ângulos congruentes dois a dois.
- **c** e **d** são retas *paralelas*, pois c ∩ d = ∅.

c) Faça em cada quadro a figura correspondente a cada indicação:

1)

r // s

2)

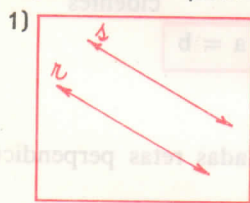
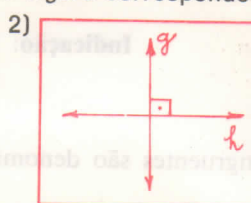
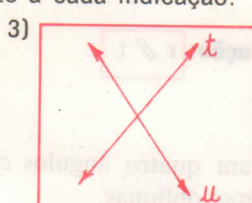
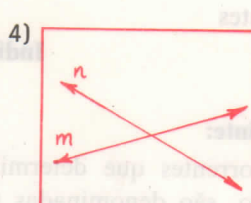
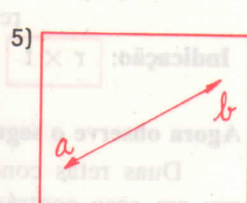
g ⊥ h

3)

t × u

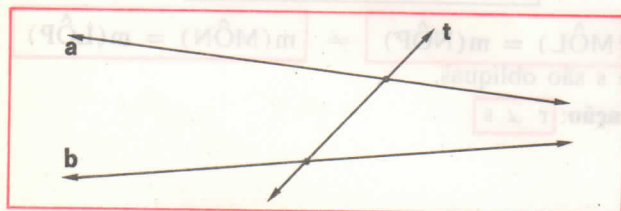
4)

m ∠ n

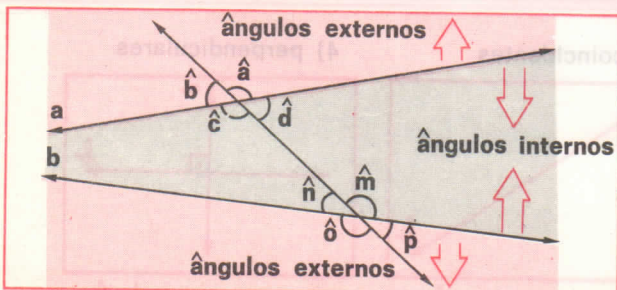
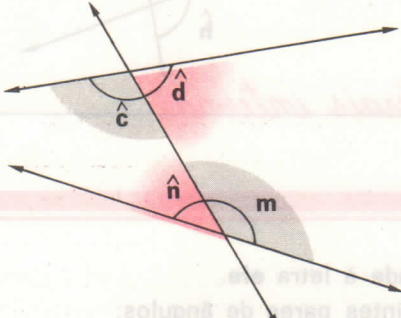
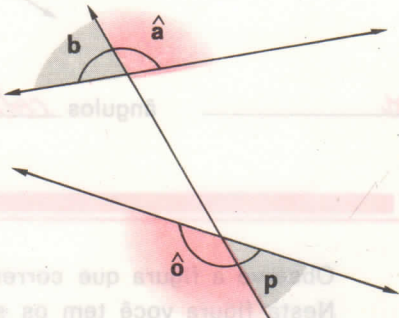
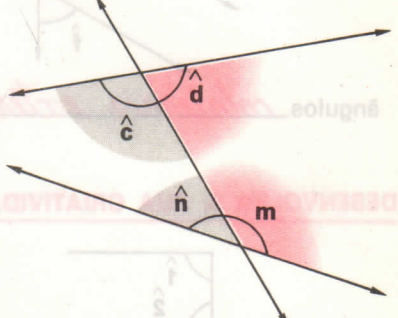
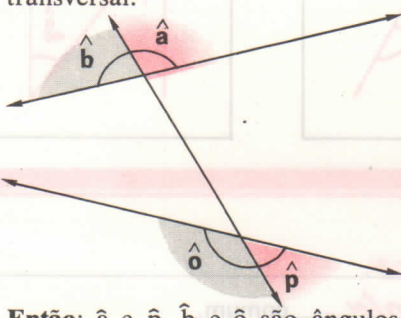
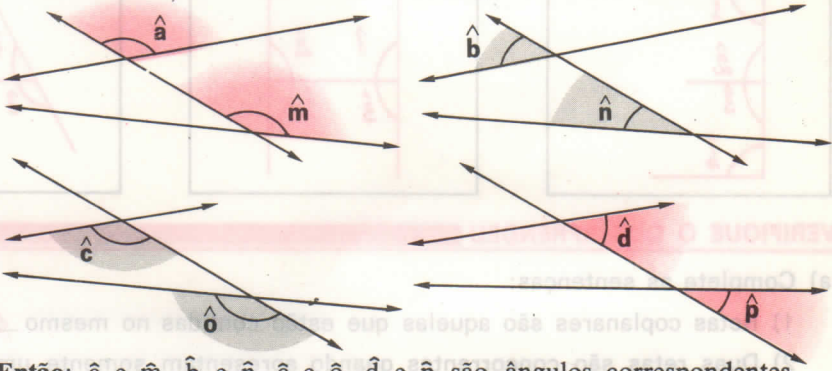
5)

a = b

NOÇÃO DE RETA TRANSVERSAL

Considere duas retas coplanares **a** e **b**. Qualquer outra reta que intercepte as retas **a** e **b** recebe o nome de reta transversal.

Veja:

A reta **t** que intercepta as retas **a** e **b** é transversal a essas retas.

Agora observe o seguinte:

- Os ângulos determinados pelas retas **a** e **t** e pelas retas **b** e **t**, e cujos interiores situam-se entre as retas **a** e **b**, recebem o nome de **ângulos internos**.
- Os ângulos determinados pelas retas **a** e **t** e pelas retas **b** e **t**, e cujos interiores não se situam entre as retas **a** e **b**, recebem o nome de **ângulos externos**.

Então, nessa figura, os ângulos:

- ĉ, d̂, m̂ e n̂ são ângulos internos;
- â, b̂, ô e p̂ são ângulos externos.

Esses ângulos combinados dois a dois constituem pares de ângulos com denominações especiais.

Veja:

Ângulos alternos internos

São ângulos internos não-adjacentes, cujos interiores situam-se em lados opostos em relação à transversal.

Então: $\hat{c}$ e $\hat{m}$, $\hat{d}$ e $\hat{n}$ são ângulos alternos internos.

Ângulos alternos externos

São ângulos externos não-adjacentes, cujos interiores situam-se em lados opostos em relação à transversal.

Então: $\hat{a}$ e $\hat{o}$, $\hat{b}$ e $\hat{p}$ são ângulos alternos externos.

Ângulos colaterais internos

São ângulos internos não-adjacentes, cujos interiores situam-se do mesmo lado em relação à transversal.

Então: $\hat{c}$ e $\hat{n}$, $\hat{d}$ e $\hat{m}$ são ângulos colaterais internos.

Ângulos colaterais externos

São ângulos externos não-adjacentes, cujos interiores situam-se do mesmo lado em relação à transversal.

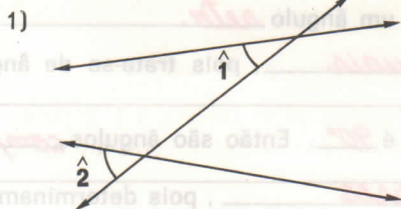
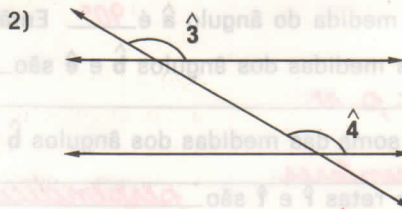
Então: $\hat{a}$ e $\hat{p}$, $\hat{b}$ e $\hat{o}$ são ângulos colaterais externos.

Ângulos correspondentes

São ângulos, um interno e outro externo, não-adjacentes, cujos interiores situam-se do mesmo lado em relação à transversal.

Então: $\hat{a}$ e $\hat{m}$, $\hat{b}$ e $\hat{n}$, $\hat{c}$ e $\hat{o}$, $\hat{d}$ e $\hat{p}$ são ângulos correspondentes.

VAMOS EXERCITAR

Dê o nome dos pares de ângulos indicados pelas figuras:

1)

ângulos correspondentes

2)

ângulos correspondentes

3)

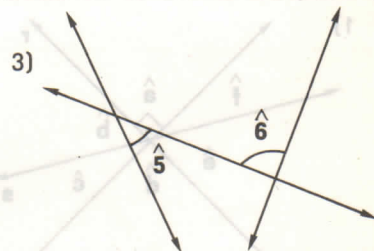
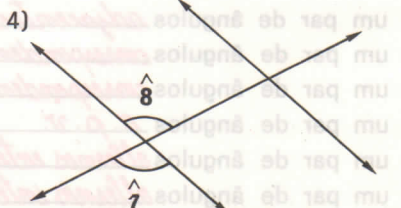
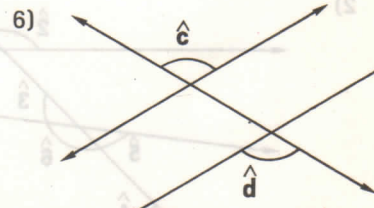
ângulos alternos internos

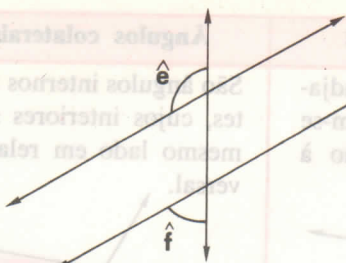
4)

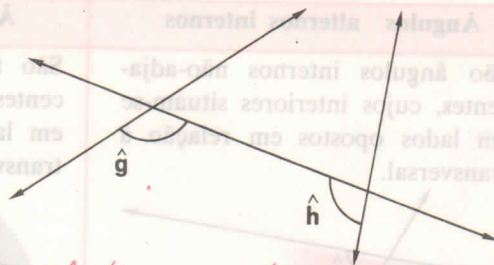
ângulos o.p.v.

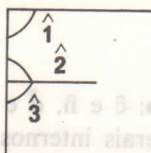
5)

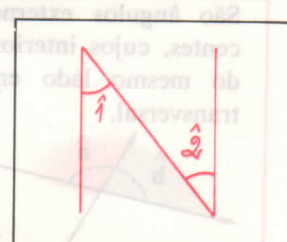
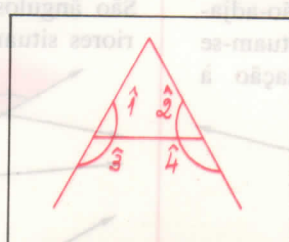
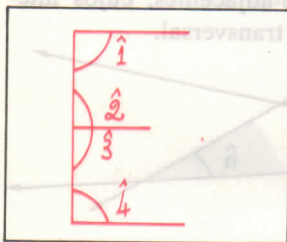
ângulos adjacentes

6)

ângulos alternos externos

7)

ângulos *colaterais externos*

8)

ângulos *colaterais internos*

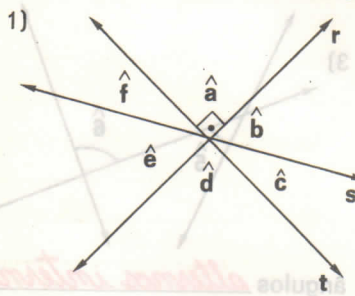
DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Observe a figura que corresponde à letra **efe**.
Nesta figura você tem os seguintes pares de ângulos:
$\hat{1}$ e $\hat{2}$: ângulos colaterais internos; $\hat{1}$ e $\hat{3}$: ângulos correspondentes; $\hat{2}$ e $\hat{3}$: ângulos adjacentes.

Com base neste exemplo, faça uma letra diferente em cada um dos quadros abaixo, indicando os pares de ângulos que podemos encontrar em cada letra.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete as sentenças:

1) Retas coplanares são aquelas que estão contidas no mesmo *plano.*
2) Duas retas são concorrentes quando apresentam somente um *ponto* comum.
3) Se duas retas coplanares não apresentam nenhum ponto comum, então elas são *paralelas.*
4) Duas retas concorrentes que determinam quatro ângulos congruentes são denominadas retas *perpendiculares.*

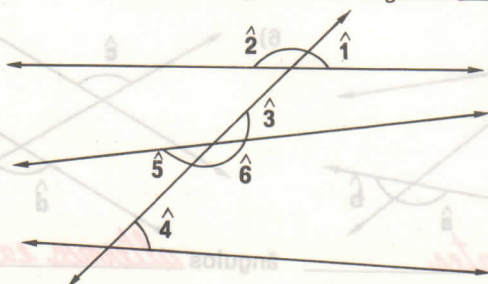
b) Complete as frases de acordo com a figura:

1)

A medida do ângulo $\hat{a}$ é *90°*. Então é um ângulo *reto.*

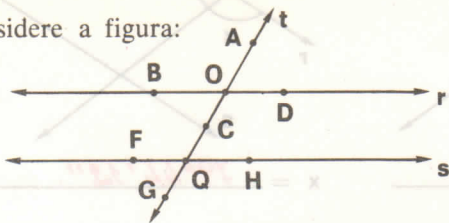
As medidas dos ângulos $\hat{b}$ e $\hat{e}$ são *iguais*, pois trata-se de ângulos *o. p. v.*

A soma das medidas dos ângulos $\hat{b}$ e $\hat{c}$ é *90°*. Então são ângulos *complementares.*

As retas $\hat{r}$ e $\hat{t}$ são *perpendiculares*, pois determinam quatro ângulos *congruentes*

2)

$\hat{1}$ e $\hat{2}$ constituem um par de ângulos *adjacentes.*
$\hat{1}$ e $\hat{3}$ constituem um par de ângulos *correspondentes.*
$\hat{3}$ e $\hat{4}$ constituem um par de ângulos *correspondentes.*
$\hat{3}$ e $\hat{5}$ constituem um par de ângulos *o. p. v.*
$\hat{1}$ e $\hat{5}$ constituem um par de ângulos *alternos externos.*
$\hat{5}$ e $\hat{4}$ constituem um par de ângulos *alternos internos.*
$\hat{1}$ e $\hat{6}$ constituem um par de ângulos *colaterais externos.*
$\hat{4}$ e $\hat{6}$ constituem um par de ângulos *colaterais internos.*

OS PARES DE ÂNGULOS E SUAS MEDIDAS

Considere a figura:

As retas **r** e **s** são paralelas (r // s) e interceptadas por uma reta transversal **t**.

Utilizando um transferidor determine as medidas dos ângulos:

Ângulos correspondentes	Ângulos alternos internos	Ângulos alternos externos	Ângulos colaterais internos	Ângulos colaterais externos
m(AÔD) = 60° m(CÔH) = 60°	m(BÔC) = 60° m(CÔH) = 60°	m(AÔD) = 60° m(FÔG) = 60°	m(BÔC) = 60° m(CÔF) = 120°	m(AÔD) = 60° m(GÔH) = 120°
m(CÔD) = 120° m(GÔH) = 120°	m(CÔD) = 120° m(CÔF) = 120°	m(AÔB) = 120° m(GÔH) = 120°	m(CÔD) = 120° m(CÔH) = 60°	m(AÔB) = 120° m(FÔG) = 60°
m(AÔB) = 120° m(CÔF) = 120°				
m(BÔC) = 60° m(FÔG) = 60°				

Agora, observando as medidas dos pares de ângulos, você certamente concluirá que:

- Os ângulos correspondentes, os alternos internos e os alternos externos determinados por duas paralelas e uma transversal são congruentes.
- Os ângulos colaterais internos e os colaterais externos determinados por duas paralelas e uma transversal são suplementares.

Considerando as retas r e s paralelas, determine as medidas dos ângulos indicados por letras:

1) 60°

a = 120°
b = 60°
c = 120°
d = 120°
e = 60°
f = 120°
g = 60°

2) 50°

a = 130°
b = 50°
c = 130°
d = 50°
e = 130°
f = 50°
g = 130°

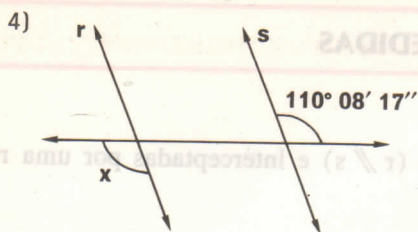
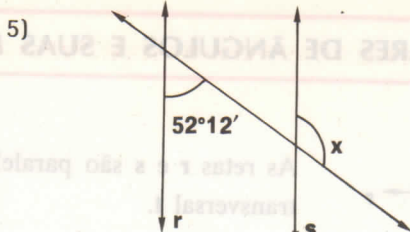
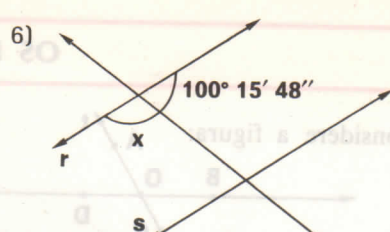
3) 110°

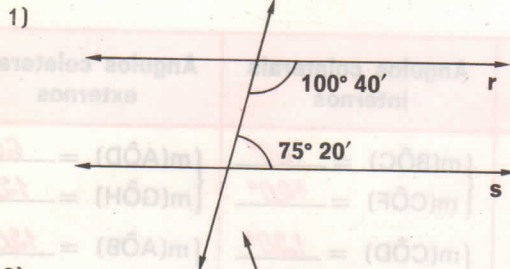
a = 70°
b = 110°
c = 70°
d = 110°
e = 70°
f = 110°
g = 70°

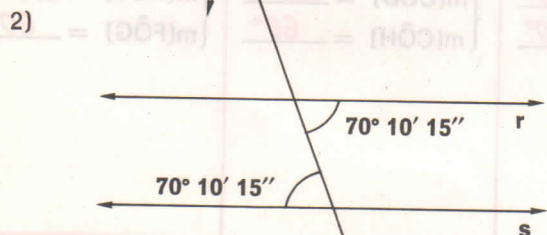
Sendo r paralela a s, descubra o valor de x nas figuras:

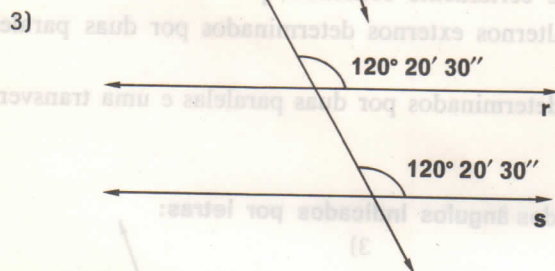
1) x = 109°28′

2) x = 40°20′30″

3) x = 90°

4) x = 110° 08' 17"

5) x = 127° 48'

6) x = 79° 44' 12"

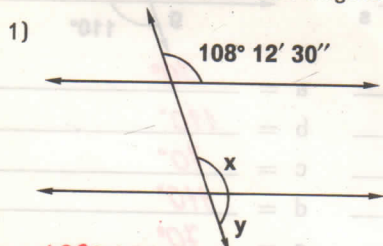
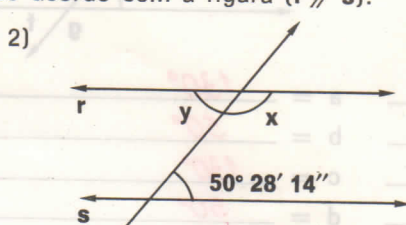
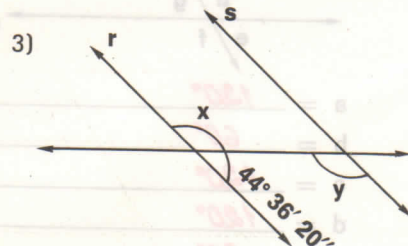
Verifique, indicando a razão, se as retas r e s são ou não paralelas:

1) r e s não são paralelas. (são/não são)

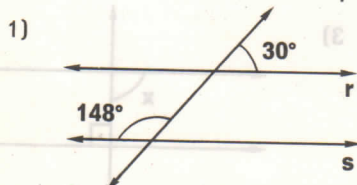
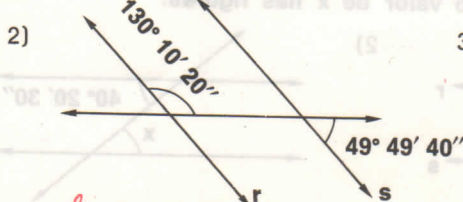
Razão: Os ângulos colaterais internos, cujas medidas são dadas, não são suplementares.

2) r e s são paralelas.

Razão: Os ângulos alternos internos, cujas medidas são dadas, são congruentes.

3) r e s são paralelas.

Razão: Os ângulos correspondentes, cujas medidas são dadas, são congruentes.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Determine as medidas dos ângulos de acordo com a figura (r // s):

1) x = 108° 12' 30"
y = 71° 47' 30"

2) x = 129° 31' 46"
y = 50° 28' 14"

3) x = 135° 23' 40"
y = 135° 23' 40"

b) Verifique se as retas **r** e **s** são paralelas:

1) Não são paralelas.

2) São paralelas.

3) Não são paralelas.

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Determine o valor de **x** de acordo com as figuras ($r \parallel s$):

1)

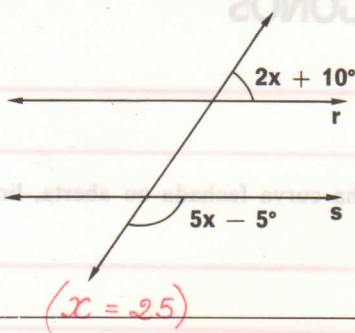
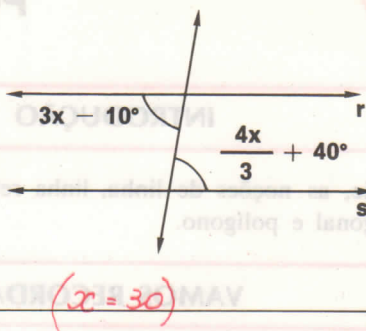
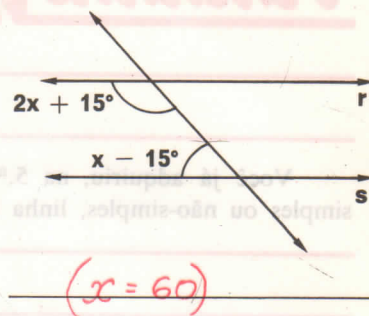
2x + 10°
r
5x − 5°
s

($x = 25$)

2)

($x = 30$)

3)

($x = 60$)

b) Faça a figura e indique as medidas de todos os ângulos determinados por duas paralelas e uma transversal, em cada um destes casos:

1) As medidas em graus de dois ângulos alternos internos são expressas por $3x + 10°$ e $4x - 10°$.
(70° e 70°)

2) As medidas em graus de dois ângulos colaterais externos são expressas por $6x + 5°$ e $10x + 15°$.
(65° e 115°)

3) As medidas em graus de dois ângulos correspondentes são expressas por $4x + 2°$ e $5x - 10°$.
(50° e 50°)

4) As medidas em graus de dois ângulos colaterais internos são expressas por x e 3x.
(45° e 135°)

5) As medidas em graus de dois ângulos alternos externos são expressas por $\frac{3x}{2}$ e $\frac{5x}{2} - 15°$.
(22°30' e 22°30')

c) Determine o valor de **x**, de acordo com a figura:

1)

x = 144° 41′ 20″

2)

x = 98° 16′ 30″

3)

x = 119° 27′ 15″

4)

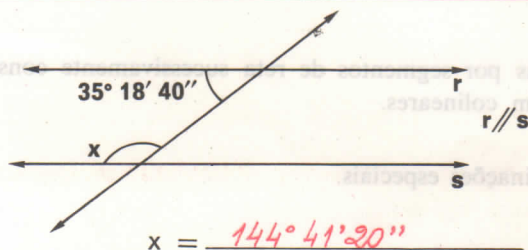
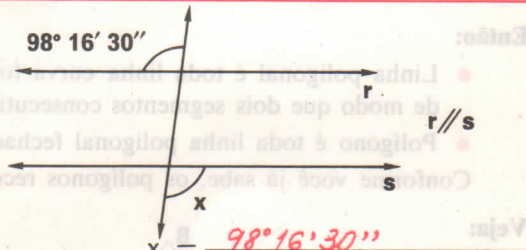
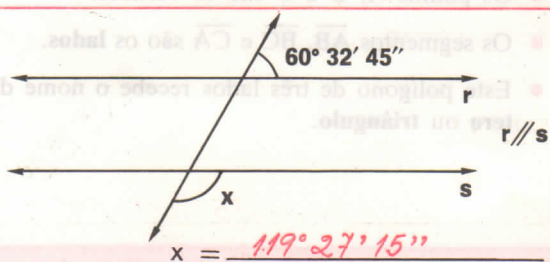
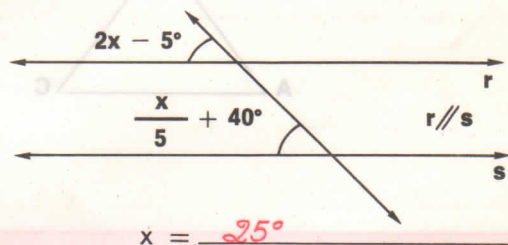
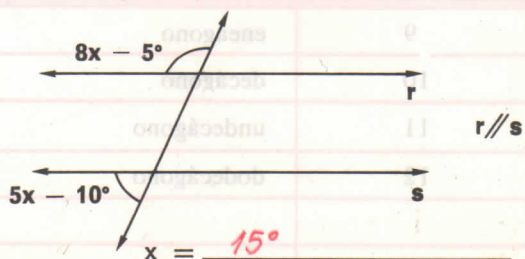
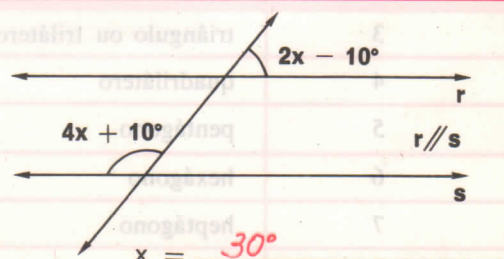
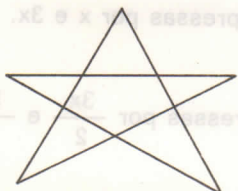
x = 25°

5)

x = 15°

6)

x = 30°

Unidade 13

POLÍGONOS

INTRODUÇÃO

Você já adquiriu, na 5.ª série, as noções de linha, linha reta, linha curva fechada ou aberta, linha curva simples ou não-simples, linha poligonal e polígono.

VAMOS RECORDAR

linha reta

linha curva aberta simples (não há ponto de intersecção)

A B

linha curva aberta não-simples (há ponto de intersecção)

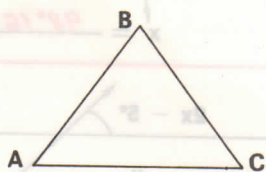
linha curva fechada não-simples. É uma linha poligonal.

linha poligonal que constitui um polígono.

Então:

- Linha poligonal é toda linha curva formada apenas por segmentos de reta sucessivamente consecutivos, de modo que dois segmentos consecutivos não sejam colineares.
- Polígono é toda linha poligonal fechada simples.

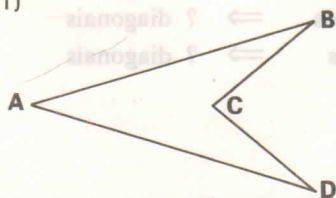
Conforme você já sabe, os polígonos recebem denominações especiais.

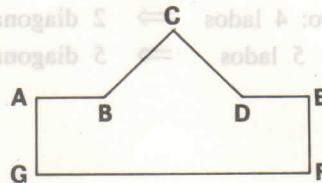
Veja:

- Os pontos A, B e C são os **vértices**.
- Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ são os **lados**.
- Este polígono de três lados recebe o nome de **trilátero** ou **triângulo**.

Número de lados	Denominação	Número de lados	Denominação
3	triângulo ou trilátero	9	eneágono
4	quadrilátero	10	decágono
5	pentágono	11	undecágono
6	hexágono	12	dodecágono
7	heptágono	⋮	
8	octógono	20	icoságono

AGORA FAÇA VOCÊ

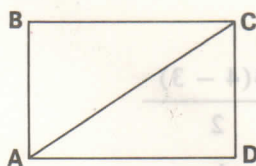
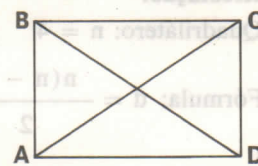
Complete adequadamente:

1)

- Vértices: A, B, C e D
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$
- Este polígono chama-se: quadrilátero.

2)

- Vértices: A, B, C, D, E, F e G
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{GA}$
- Este polígono chama-se: heptágono.

A DIAGONAL: UM SEGMENTO ESPECIAL DO POLÍGONO

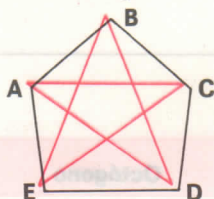
Considere um polígono convexo qualquer. Por exemplo: um quadrilátero. Se você ligar dois vértices não-consecutivos desse polígono, obterá um segmento denominado **diagonal**.

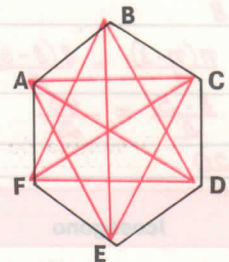
Observe:

Ligando os vértices não-consecutivos A e C, obtém-se a diagonal $\overline{AC}$.

Ligando os vértices não-consecutivos B e D, obtém-se a diagonal $\overline{BD}$.

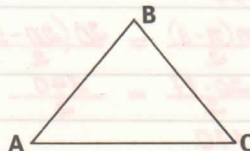
Logo, o quadrilátero apresenta duas diagonais.

VAMOS EXERCITAR

Trace todas as diagonais dos polígonos e complete as sentenças:

1)

- Este polígono chama-se pentágono porque possui 5 lados.
- Este polígono tem 5 diagonais, que são: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$.

2)

- Este polígono chama-se hexágono porque possui 6 lados.
- Este polígono tem 9 diagonais, que são: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DF}$.

3)

- Este polígono chama-se trilátero porque possui 3 lados.
- Este polígono tem 0 diagonais, que são: ______

Perceba que, à medida que aumenta o número de lados, ocorre um aumento ainda maior do número de diagonais, tornando-se cada vez mais trabalhoso traçar todas as diagonais. Veja:

triângulo: 3 lados ⟹ 0 diagonais
quadrilátero: 4 lados ⟹ 2 diagonais
pentágono: 5 lados ⟹ 5 diagonais
hexágono: 6 lados ⟹ 9 diagonais
heptágono: 7 lados ⟹ ? diagonais
octógono: 8 lados ⟹ ? diagonais
⋮

Existe uma fórmula que nos permite calcular o número de diagonais de um polígono sem necessidade de traçá-las. Observe:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

d: representa o número de diagonais.
n: representa o número de lados.

Vejamos um exemplo:

Determine o número de diagonais de um quadrilátero.

Resolução:
Quadrilátero: n = 4

Fórmula: $d = \frac{n(n-3)}{2} \Longrightarrow d = \frac{4(4-3)}{2}$

$d = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$

Resposta: 2.

AGORA FAÇA VOCÊ

a) Calcule o número de diagonais de um hexágono.

Resolução:

hexágono: n = 6

Fórmula: $d = \frac{n(n-3)}{2} \Longrightarrow d = \frac{6(6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$

Resposta: 9

b) Calcule o número de diagonais dos seguintes polígonos:

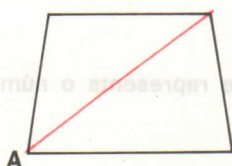
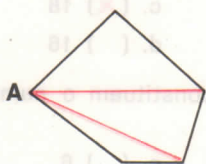
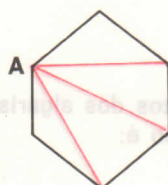
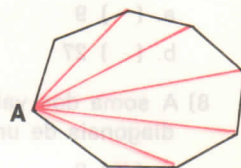
Pentágono	Heptágono	Octógono
n = 5 $d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{5(5-3)}{2}$ $d = \frac{5 \cdot 2}{2}$ d = 5	n = 7 $d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{7(7-3)}{2}$ $d = \frac{7 \cdot 4}{2} = \frac{28}{2}$ d = 14	n = 8 $d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2}$ $d = \frac{8 \cdot 5}{2} = \frac{40}{2}$ d = 20
Undecágono	**Dodecágono**	**Icoságono**
n = 11 $d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{11(11-3)}{2}$ $d = \frac{11 \cdot 8}{2} = \frac{88}{2}$ d = 44	n = 12 $d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{12(12-3)}{2}$ $d = \frac{12 \cdot 9}{2} = \frac{108}{2}$ d = 54	n = 20 $d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{20(20-3)}{2}$ $d = \frac{20 \cdot 17}{2} = \frac{340}{2}$ d = 170

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Descubra quantos triângulos podemos obter em cada uma destas figuras, traçando as diagonais a partir do ponto A:

1) A

2)

3) 4)

2 triângulos — 3 triângulos — 4 triângulos — 6 triângulos

b) Complete o quadro:

Polígono	Número de lados	Número de vértices	Número de triângulos obtidos, traçando as diagonais a partir de um vértice	Número total de diagonais
heptágono	7	7	5	14
eneágono	9	9	7	27
octógono	8	8	6	20
decágono	10	10	8	35
dodecágono	12	12	10	54
icoságono	20	20	18	170

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Testes

1) Assinale a afirmação correta:

a. ( ) Toda linha poligonal determina um polígono.
b. ( ) Diagonal de um polígono é o segmento que une dois vértices do polígono.
c. ( ) Todo polígono tem diagonal.
d. (X) O pentágono tem cinco diagonais.

2) O icoságono é o polígono de:

a. ( ) 20 diagonais.
b. ( ) 33 diagonais.
c. (X) 170 diagonais.
d. ( ) 17 diagonais.

3) O polígono cujo número de lados corresponde ao dobro do número de diagonais é o:

a. ( ) trilátero.
b. (X) quadrilátero.
c. ( ) pentágono.
d. ( ) octógono.

4) O polígono cujo número de lados é igual ao número de diagonais é o:

a. ( ) triângulo.
b. ( ) quadrilátero.
c. (X) pentágono.
d. ( ) heptágono.

5) O polígono cujo número de lados corresponde à metade do número de diagonais é o:

a. ( ) quadrilátero.
b. ( ) hexágono.
c. ( ) icoságono.
d. (X) heptágono.

6) A soma do número de lados com o número de diagonais de um decágono é:

a. (X) 45
b. ( ) 35
c. ( ) 25
d. ( ) 55

7) A diferença entre o número de diagonais e o número de lados de um eneágono é:

a. ( ) 9
b. ( ) 27
c. (X) 18
d. ( ) 16

8) A soma dos valores absolutos dos algarismos que constituem o numeral que representa o número de diagonais de um dodecágono é:

a. (X) 9
b. ( ) 3
c. ( ) 6
d. ( ) 8

9) O número de diagonais de um polígono de 23 lados pode ser representado pelo numeral:

a. ( ) 23
b. (X) $2 \times 5 \times 23$
c. ( ) $\frac{23(23-2)}{3}$
d. ( ) 23×20

10) A soma entre o número de diagonais de um undecágono e o número de diagonais de um hexágono é:

a. ( ) 17
b. ( ) 48
c. (X) 53
d. ( ) 62

b) Resolva:

1) Cada um dos lados de um polígono mede 5 cm. Sabendo que o perímetro é 95 cm, determine o número de lados e o número de diagonais desse polígono. (19 e 152)

2) O perímetro de um polígono é 150,5 m. Determine o número de lados e o número de diagonais, sabendo que todos os lados apresentam medida igual a 35 dm. (43 e 860)

3) Calcule o número de lados e o número de diagonais de um polígono cujo perímetro é 360 cm, sabendo que todos os lados medem 4,5 dm. (8 e 20)

4) Os lados de um polígono apresentam a mesma medida. Sabendo que essa medida é 1,3 dm e que o perímetro do polígono é 325 cm, determine:

a) O número de lados do polígono. (25)
b) O número de diagonais do polígono. (275)

5) Associe a coluna da esquerda com a da direita:

Número de lados de um polígono	Número de diagonais desse polígono
(a) 31	(b) 1 034
(b) 47	(a) 434
(c) 29	(e) 230
(d) 37	(g) 860
(e) 23	(c) 377
(f) 41	(d) 629
(g) 43	(f) 779

Agora indique os casos em que o número de lados e os respectivos números de diagonais são números primos.

Número de lados	Número de diagonais
29	377
37	629
41	779

6) Determine o número de diagonais do polígono cujo número de lados é o número da unidade **Estudo das Simetrias e da Translação** deste livro. (44)

7) Calcule o número de diagonais do polígono cujo número de lados é igual:

a) ao número da casa em que reside.

b) ao número de alunos da sua classe.

c) ao número de pessoas da sua família.

d) à soma dos valores absolutos dos algarismos que constituem o CEP da região em que mora.

8) O número de diagonais de um polígono é igual ao triplo do número de lados. Qual é esse polígono? (eneágono)

(**Sugestão:** fazer d = 3n e dividir ambos os membros da igualdade por **n**.)

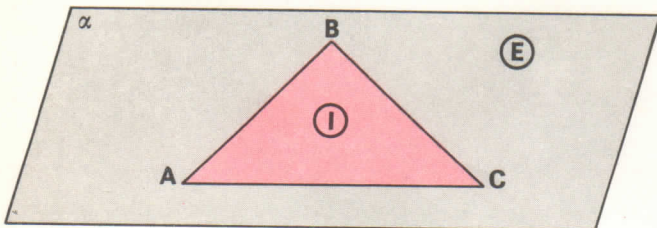
9) Descubra o número de lados de um polígono, sabendo que o número de diagonais é igual ao quádruplo do número de lados. (11)

10) Descubra a fórmula através da qual se calcularia o número de diagonais de um polígono, se o número de lados fosse representado por (p + 3). $\left(d = \frac{p(p+3)}{2}\right)$

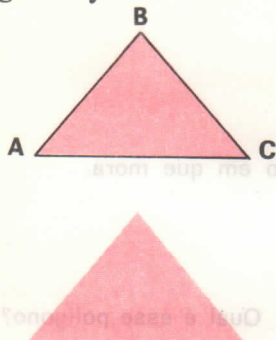
O ESTUDO DO TRIÂNGULO

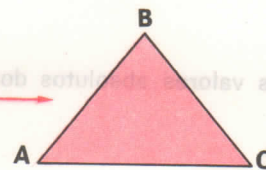
NOÇÃO DE REGIÃO TRIANGULAR

Você já sabe que triângulo é a denominação de uma linha poligonal fechada simples constituída por três segmentos, ou seja:

Triângulo é o polígono de três lados.

Note que o triângulo divide o plano em duas regiões:

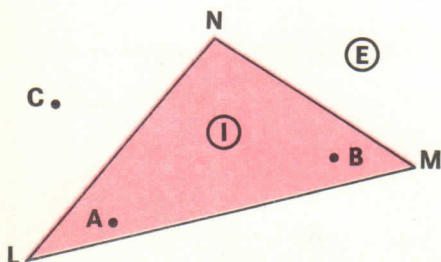
- o **interior** Ⓘ, que é uma região convexa;
- o **exterior** Ⓔ, que é uma região não-convexa.

Agora veja:

Triângulo
Indicação: $\triangle ABC$

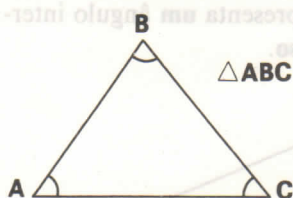
Interior: Ⓘ

Região triangular
Indicação: S_{ABC}

A região triangular é a região constituída pelo triângulo e pelo respectivo interior.

Então: $S_{ABC} = \triangle ABC \cup$ Ⓘ

Complete adequadamente com o símbolo $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

1) A $\notin$ $\triangle LMN$
2) L $\in$ $\triangle LMN$
3) C $\in$ Ⓔ
4) B $\in$ Ⓘ
5) M $\in$ S_{LMN}
6) N $\notin$ Ⓔ
7) $\overline{AB}$ $\not\subset$ $\triangle LMN$
8) $\overline{AB}$ $\subset$ Ⓘ
9) $\overline{AB}$ $\subset$ S_{LMN}
10) Ⓘ $\subset$ S_{LMN}
11) $\triangle LMN$ $\subset$ S_{LMN}
12) $\overline{MN}$ $\subset$ S_{LMN}

OS ÂNGULOS DETERMINADOS PELOS LADOS DE UM TRIÂNGULO

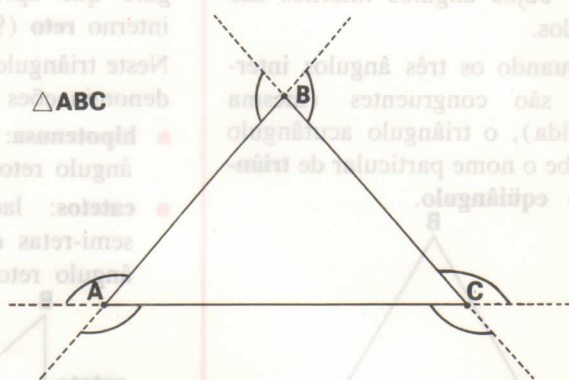
Examine o quadro abaixo com atenção.

Os ângulos:

- BÂC ou Â,
- AB̂C ou B̂,
- BĈA ou Ĉ,

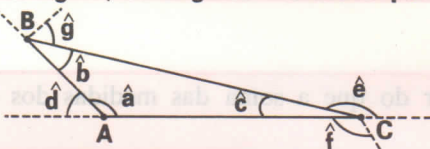
recebem o nome de **ângulos internos**.

Cada lado é oposto ao ângulo interno determinado pelos outros dois lados.

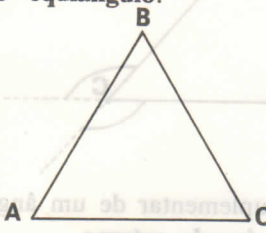
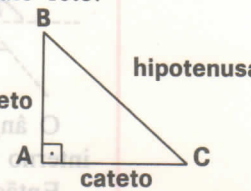
Então:

- $\overline{BC}$ é oposto ao ângulo Â;
- $\overline{AC}$ é oposto ao ângulo B̂;
- $\overline{AB}$ é oposto ao ângulo Ĉ.

O ângulo adjacente e suplementar de um ângulo interno recebe o nome de **ângulo externo**.

Então, para cada ângulo interno temos dois ângulos externos, os quais são opostos pelo vértice.

Verifique se, na figura, os ângulos indicados por letras são internos ou externos:

- Os ângulos internos são: â, b̂ e ĉ.
- Os ângulos externos são: d̂ e ê.
- Os ângulos f̂ e ĝ não são internos nem externos.

UMA CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

Os triângulos são classificados segundo dois critérios:

- 1.º critério: de acordo com os lados;
- 2.º critério: de acordo com os ângulos.

Observe:

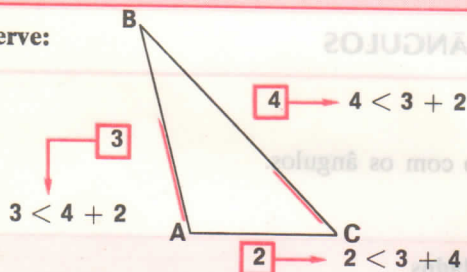
Classificação de acordo com os lados		
Triângulo eqüilátero	**Triângulo isósceles**	**Triângulo escaleno**
Denominação dada ao triângulo cujos lados apresentam a mesma medida. m($\overline{AB}$) = m($\overline{BC}$) = m($\overline{AC}$) Logo, △ABC é eqüilátero.	Denominação dada ao triângulo que apresenta dois dos seus lados com a mesma medida. m($\overline{LM}$) = m($\overline{MN}$) ≠ m($\overline{LN}$) Logo, △LMN é isósceles. Neste caso: • o lado cuja medida é diferente ($\overline{LN}$) recebe o nome de **base**; • o ângulo interno M̂ oposto à base recebe o nome de **ângulo do vértice**.	Denominação dada ao triângulo cujos lados apresentam medidas diferentes. m($\overline{RS}$) ≠ m($\overline{RT}$) ≠ m($\overline{ST}$) Logo, △RST é escaleno.

Classificação de acordo com os ângulos		
Triângulo acutângulo	**Triângulo retângulo**	**Triângulo obtusângulo**
Denominação dada ao triângulo cujos ângulos internos são agudos. Quando os três ângulos internos são congruentes (mesma medida), o triângulo acutângulo recebe o nome particular de **triângulo eqüiângulo**.	Denominação dada ao triângulo que apresenta **um** ângulo interno **reto** (90º). Neste triângulo, os lados recebem denominações especiais: • **hipotenusa**: lado oposto ao ângulo reto; • **catetos**: lados contidos nas semi-retas que determinam o ângulo reto.	Denominação dada ao triângulo que apresenta **um** ângulo interno **obtuso**.

DUAS RELAÇÕES MUITO IMPORTANTES

PRIMEIRA RELAÇÃO

Em todos os triângulos, a medida de qualquer lado é menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.

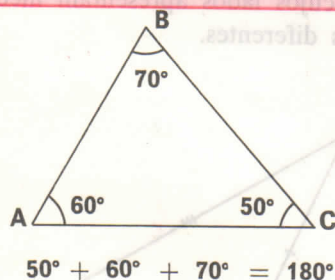
Observe:

Você jamais conseguirá construir um triângulo cujos lados meçam, por exemplo, 3 cm, 4 cm e 7 cm.

$3 < 4 + 7$

$4 < 3 + 7$

$7 = 3 + 4$

SEGUNDA RELAÇÃO

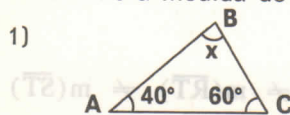
Em todos os triângulos, a soma das medidas dos três ângulos internos é igual a 180º (Lei angular de Tales).

Você jamais conseguirá construir um triângulo cujos ângulos internos meçam, por exemplo, 70º, 80º e 50º.

$70^\circ + 80^\circ + 50^\circ = 200^\circ \neq 180^\circ$

Por enquanto você deverá aceitar e memorizar estas duas relações. Mais tarde elas serão justificadas.

VAMOS EXERCITAR

a) Determine a medida do ângulo indicado por **x** e classifique o triângulo:

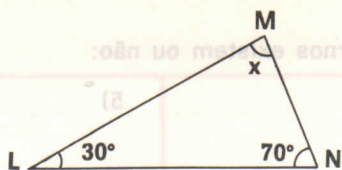
1)

△ABC é acutângulo.

Resolução

$40^\circ + 60^\circ + x = 180^\circ$

$x = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ$

$x = 80^\circ$

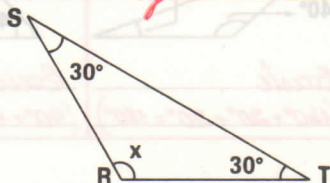
2)

Resolução

$30° + 70° + x = 180°$

$x = 180° - 30° - 70°$

$x = 80°$

△LMN é *acutângulo.*

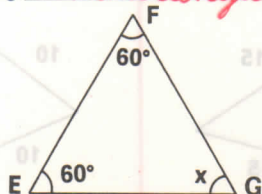
3)

Resolução

$30° + 30° + x = 180°$

$x = 180° - 30° - 30°$

$x = 120°$

△RST é *obtusângulo.*

4)

Resolução

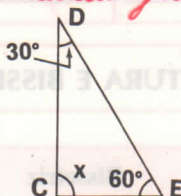
$60° + 60° + x = 180°$

$x = 180° - 60° - 60°$

$x = 60°$

△EFG é *acutângulo (eqüiângulo).*

5)

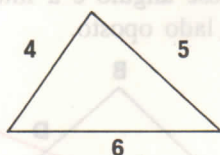
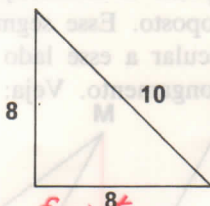
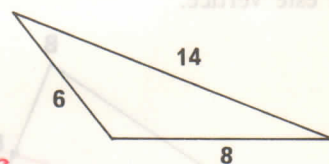
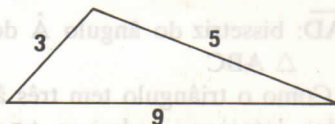
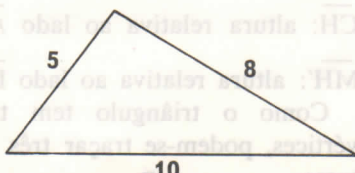
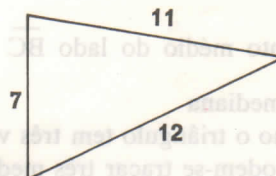
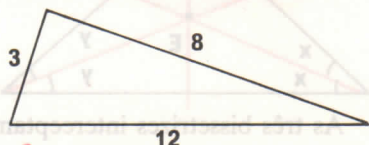
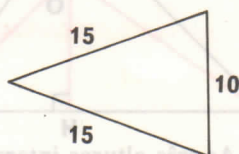
30° D x 60° C E

Resolução

$30° + 60° + x = 180°$

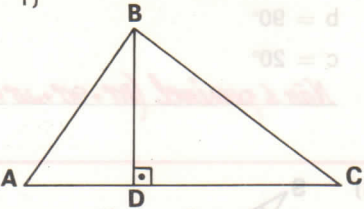
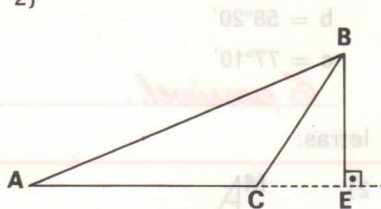
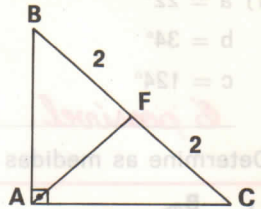
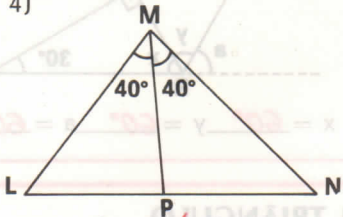
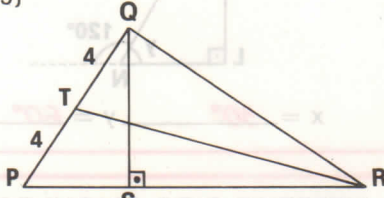
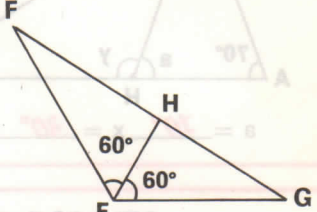
$x = 180° - 30° - 60°$

$x = 90°$

△CDE é *retângulo.*

b) Verifique se os triângulos com as seguintes medidas dos lados existem ou não:

1) Lados 4, 5, 6. *Existe.*	2) Lados 8, 10, 8. *Existe.*	3) Lados 14, 6, 8. *Não existe (14 = 6 + 8).*
4) Lados 3, 5, 9. *Não existe (9 > 3 + 5).*	5) Lados 5, 8, 10. *Existe.*	6) Lados 11, 7, 12. *Existe.*
7) Lados 3, 8, 12. *Não existe (12 > 3 + 8).*	8) Lados 15, 10, 15. *Existe.*	9) Lados 8, 8, 8. *Existe.*

c) Verifique se os triângulos com as seguintes medidas dos ângulos internos existem ou não:

d) Classifique o triângulo segundo as medidas dos lados:

TRÊS ELEMENTOS IMPORTANTES DE UM TRIÂNGULO: MEDIANA, ALTURA E BISSETRIZ

Mediana

Denominação dada ao segmento cujos extremos são um vértice e o ponto médio do lado oposto a este vértice.

M: ponto médio do lado $\overline{BC}$

$\overline{AM}$: mediana

Como o triângulo tem três vértices, podem-se traçar três medianas.

As três medianas interceptam-se no mesmo ponto (D), denominado **baricentro**.

Altura

Denominação dada ao segmento cujos extremos são um vértice e o ponto de intersecção com o lado oposto. Esse segmento é perpendicular a esse lado ou ao seu prolongamento. Veja:

$\overline{CH}$: altura relativa ao lado $\overline{AB}$

$\overline{MH'}$: altura relativa ao lado $\overline{LN}$

Como o triângulo tem três vértices, podem-se traçar três alturas.

As três alturas interceptam-se no mesmo ponto (O), denominado **ortocentro**.

Bissetriz

Denominação dada ao segmento contido na bissetriz de um ângulo, cujos extremos são o vértice desse ângulo e a intersecção com o lado oposto.

$\overrightarrow{AD}$: bissetriz do ângulo $\hat{A}$

$\overline{AD}$: bissetriz do ângulo $\hat{A}$ do $\triangle ABC$

Como o triângulo tem três ângulos internos, podem-se traçar três bissetrizes.

As três bissetrizes interceptam-se no mesmo ponto (E), denominado **incentro**.

EXERCÍCIOS

Dê o nome dos segmentos:

1)

$\overline{BD}$: *altura relativa ao lado $\overline{AC}$*

2)

$\overline{BE}$: *altura relativa ao lado $\overline{AC}$*

3)

$\overline{AF}$: *mediana*

4)

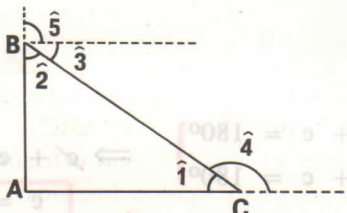
$\overline{MP}$: *bissetriz*

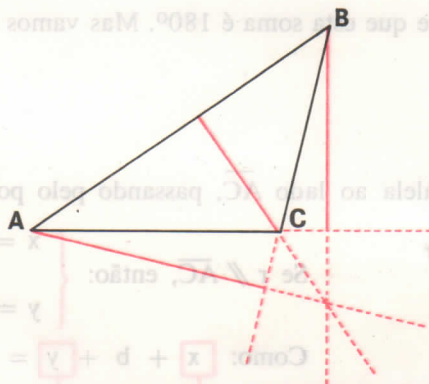
5)

$\overline{RT}$: *mediana*

$\overline{QS}$: *altura relativa ao lado $\overline{PR}$*

6)

$\overline{EH}$: *bissetriz*

DESENVOLVA SUA CRIATIVIDADE

Com o auxílio de um transferidor, trace as três alturas do triângulo ABC. Elas se interceptam? E os seus prolongamentos se interceptam?

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Dados os triângulos, verifique quais dos ângulos indicados são internos e quais são externos:

1)

Ângulos internos: *$\hat{1}$ e $\hat{2}$*

Ângulos externos: *$\hat{4}$*

2)

Ângulos internos: *$\hat{1}$ e $\hat{2}$*

Ângulos externos: *$\hat{3}$, $\hat{4}$ e $\hat{6}$*

b) Chamando de **a**, **b** e **c** as medidas dos comprimentos dos lados dos triângulos, verifique se é possível ou não construir triângulos com as seguintes medidas:

1) a = 4 cm
b = 5 cm
c = 8 cm
É possível.

2) a = 7 cm
b = 7 cm
c = 7 cm
É possível.

3) a = 10 cm
b = 5 cm
c = 4 cm
Não é possível (10 > 5 + 4).

c) Chamando de **a**, **b** e **c** as medidas dos ângulos internos dos triângulos, verifique se é possível ou não construir triângulos com as seguintes medidas:

1) $a = 22°$
$b = 34°$
$c = 124°$
É possível.

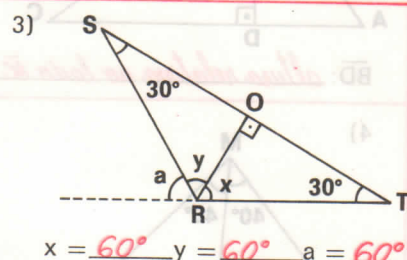
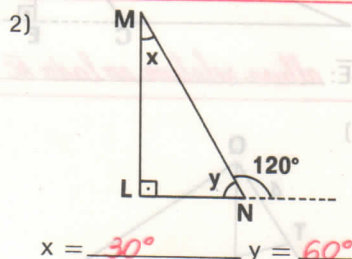
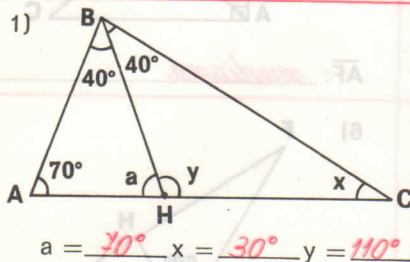
2) $a = 44°30'$
$b = 58°20'$
$c = 77°10'$
É possível.

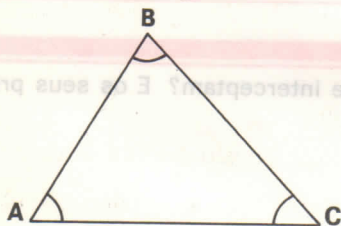
3) $a = 80°$
$b = 90°$
$c = 20°$
Não é possível ($80° + 90° + 20° \neq 180°$)

d) Determine as medidas indicadas por letras:

1)
a = 70° x = 30° y = 110°

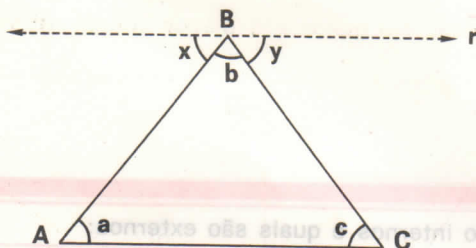
2)
x = 30° y = 60°

3)
x = 60° y = 60° a = 60°

RELAÇÃO ENTRE AS MEDIDAS DOS ÂNGULOS DE UM TRIÂNGULO

Observe o triângulo:

Se adicionarmos as medidas dos três ângulos internos de um triângulo, que resultado obtemos?

Você já sabe que esta soma é 180°. Mas vamos agora provar que isso é verdadeiro.

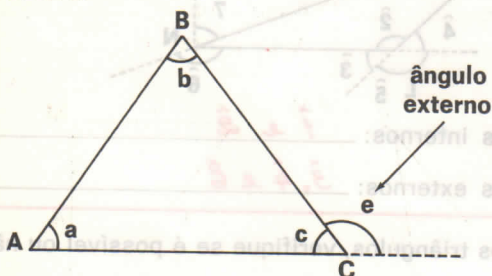
Veja:

Tracemos no triângulo abaixo uma paralela ao lado $\overline{AC}$, passando pelo ponto B.

Se $r \parallel \overline{AC}$, então: $x = a$ (ângulos alternos internos); $y = c$ (ângulos alternos internos)

Como: $x + b + y = 180°$, vem:

$$a + b + c = 180°$$

Desta relação, obtemos outra bastante importante.

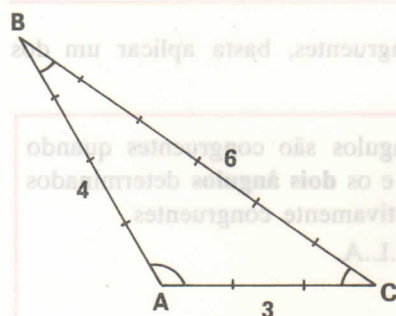
Observe:

$$\left.\begin{array}{r} c + e = 180° \\ a + b + c = 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \not{c} + e = a + b + \not{c}$$

$$\boxed{e = a + b}$$

Portanto:

A medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes a este ângulo externo.

Dê a medida do ângulo indicado na figura pela letra x:

RELAÇÃO ENTRE A MEDIDA DO ÂNGULO INTERNO E A MEDIDA DO COMPRIMENTO DO LADO OPOSTO

Com o auxílio de um transferidor, determine as medidas dos ângulos internos do triângulo ao lado.

Você encontrará aproximadamente:

$m(A) = 120^o, \quad m(\hat{B}) = 25^o \quad e \quad m(\hat{C}) = 35^o$

Agora comparemos a medida dos ângulos e a do lado oposto a cada ângulo.

ângulo A: 120°	lado oposto: 6
ângulo $\hat{B}$: 25°	lado oposto: 3
ângulo $\hat{C}$: 35°	lado oposto: 4

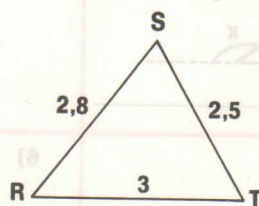
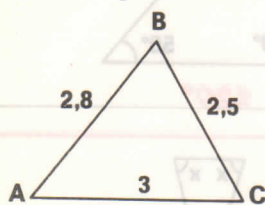
Note que ao maior ângulo opõe-se o maior lado, ou, então, ao menor ângulo opõe-se o menor lado.

Verifique qual é o maior e o menor lado dos triângulos:

Verifique qual é o maior e o menor ângulo interno dos triângulos:

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Observe os triângulos:

Note que os lados desses triângulos são respectivamente congruentes:

$m(\overline{AB}) = m(\overline{RS}) = 2{,}8$ cm

$m(\overline{BC}) = m(\overline{ST}) = 2{,}5$ cm

$m(\overline{AC}) = m(\overline{RT}) = 3$ cm

Se você agora, com o auxílio de um transferidor, medir os ângulos internos desses triângulos, encontrará aproximadamente:

$m(\hat{A}) = m(\hat{R}) = 50^o$ $\quad m(\hat{B}) = m(\hat{S}) = 70^o$ $\quad m(\hat{C}) = m(\hat{T}) = 60^o$

Conclusão: Os triângulos ABC e RST apresentam os três lados e os três ângulos respectivamente congruentes. Dois triângulos nestas condições recebem o nome de **triângulos congruentes**.

Indicação: $\triangle ABC \cong \triangle RST$

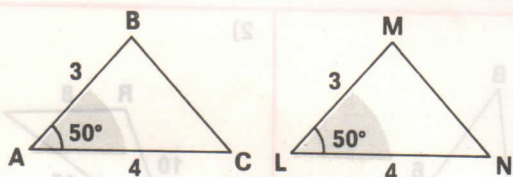
CASOS DE CONGRUÊNCIA: UMA SIMPLIFICAÇÃO

Para você reconhecer, sem perder muito tempo, se dois triângulos são congruentes, basta aplicar um dos seguintes critérios conhecidos por **casos de congruência**.

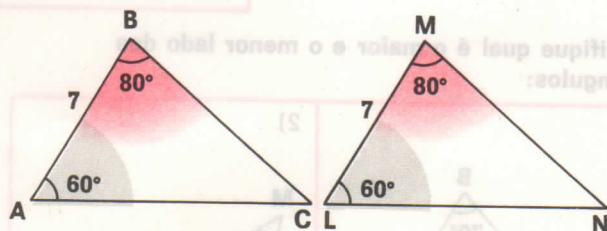
1.º caso: Dois triângulos são congruentes quando apresentam **dois lados** e o **ângulo** determinado por eles respectivamente congruentes.

Indicação: L. A. L.

lado lado

ângulo

$\triangle ABC \cong \triangle LMN$

2.º caso: Dois triângulos são congruentes quando apresentam **um lado** e os **dois ângulos** determinados por esse lado respectivamente congruentes.

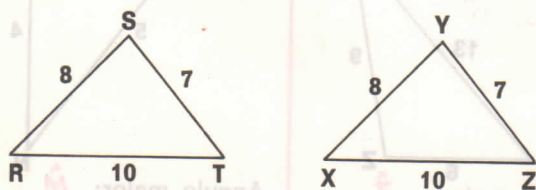
Indicação: A.L.A.

$\triangle ABC \cong \triangle LMN$

3.º caso: Dois triângulos são congruentes quando apresentam os **três lados** respectivamente congruentes.

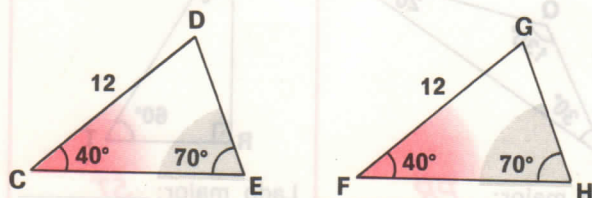
Indicação: L.L.L.

S

8 7

R 10 T

$\triangle RST \cong \triangle XYZ$

4.º caso: Dois triângulos são congruentes quando apresentam **um lado, um ângulo** determinado por esse lado e o **ângulo oposto** a esse lado respectivamente congruentes.

Indicação: L.A.A$_o$.

$\triangle CDE \cong \triangle FGH$

Através de que caso de congruência pode-se garantir que os triângulos dados são congruentes:

1) △ABC ≅ △CDE
Caso: L.A.L.

2) △ABC ≅ △ACD
Caso: A.L.A.

3) △LMN ≅ △NMP
Caso: L.A.A$_o$

4) △PQS ≅ △QRS
Caso: L.L.L.

5) △RST ≅ △RTU
Caso: A.L.A.

6) △ABE ≅ △BDC
Caso: L.A.A$_o$.

7) △FGK ≅ △GHI
Caso: L.A.A$_o$.

8) △ABD ≅ △BCD
Caso: L.L.L.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete conforme a figura:

1)
x = 110°
Lado maior: $\overline{BC}$
Lado menor: $\overline{AC}$
△ABC é retângulo escaleno.

2)
x = 135°
Lado maior: $\overline{MN}$
Lado menor: $\overline{ML}$ ou $\overline{LN}$
△LMN é retângulo isósceles.

3)
x = 120°
Lado maior: $\overline{XY}$
Lado menor: $\overline{YZ}$
△XYZ é acutângulo escaleno.

4)
x = 80°
Lado maior: $\overline{PR}$
Lado menor: $\overline{QR}$ ou $\overline{PQ}$
△PQR é acutângulo isósceles.

5)
x = 150°
Lado maior: $\overline{RT}$
Lado menor: $\overline{ST}$
△RST é obtusâng. escal.

6)
x = 60°
△CDE é acutângulo eqüilátero.

7)
x = 110°
y = 40°
△ABC é obtusâng. isósceles.
△CDE é retângulo escaleno.

8)
x = 35°
y = 60°
△PQR é retâng. escaleno.
△RST é acutâng. escaleno.

b) Indique o caso que garante a congruência dos triângulos:

1) △ABC ≅ △CDE
Caso: A.L.A.

2) △PQR ≅ △PRS
Caso: A.L.A.

3) △XYZ ≅ △YWV
Caso: L.A.L.

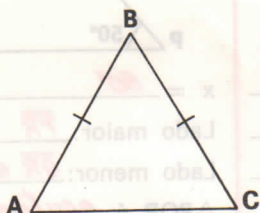
4) △LMO ≅ △PMN
Caso: L.A.A$_o$.

5) △ABE ≅ △BCD
Caso: L.L.L.

6) △FGI ≅ △GHI
Caso: L.A.L.

DESENVOLVA SUA CRIATIVIDADE

Dois triângulos que apresentam os três lados respectivamente congruentes são congruentes (L.L.L.). Verifique se dois triângulos que apresentam os três ângulos internos respectivamente congruentes são também congruentes. Se existir este caso, como você o indicaria?

UMA APLICAÇÃO DOS CASOS DE CONGRUÊNCIA

Considere um triângulo isósceles.

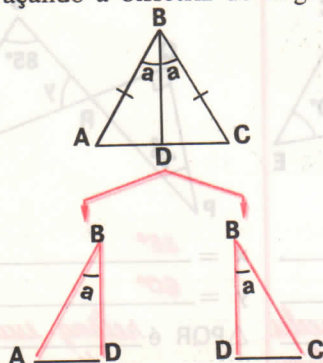
$m(\overline{AB}) = m(\overline{BC})$

$\overline{AC}$: base

$\hat{B}$: ângulo do vértice

$\hat{A}$ e $\hat{C}$: ângulos da base

Vamos provar agora que os ângulos da base são congruentes.

Traçando a bissetriz do ângulo $\hat{B}$, teremos:

Note que os triângulos ABD e DBC apresentam dois lados e o ângulo determinado por eles respectivamente congruentes. Então, esses triângulos são congruentes pelo caso L.A.L.

Logo, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes.

Conclusão:

Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

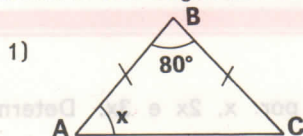
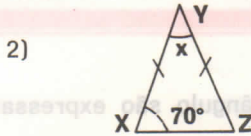
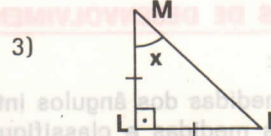
DESENVOLVA SUA CRIATIVIDADE

Mostre que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, traçando:

- a mediana relativa à base;
- a altura relativa à base.

EXERCÍCIOS

Determine nos seguintes triângulos isósceles as medidas dos ângulos indicados por letras:

1)

m(Â) = 50°

Resolução:

x + x + 80° = 180°

$x + x = 180° - 80°$

$2x = 100°$

$x = 50°$

2)

m(Ŷ) = 40°

Resolução:

$x + 70° + 70° = 180°$

$x = 180° - 70° - 70°$

$x = 40°$

3)

m(M̂) = 45°

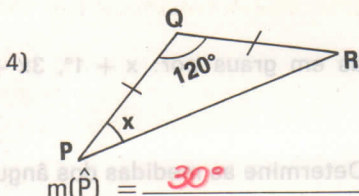
Resolução:

$90° + x + x = 180°$

$x + x = 180° - 90°$

$2x = 90°$

$x = 45°$

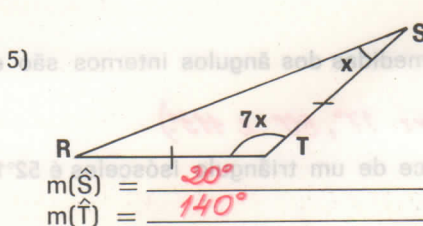
4)

m(P̂) = 30°

Resolução:

$x + x + 120° = 180°$

$x + x = 180° - 120°$

$2x = 60°$

$x = 30°$

5)

m(Ŝ) = 20°

m(T̂) = 140°

Resolução:

$x + x + 7x = 180°$

$9x = 180°$

$x = 20°$

6)

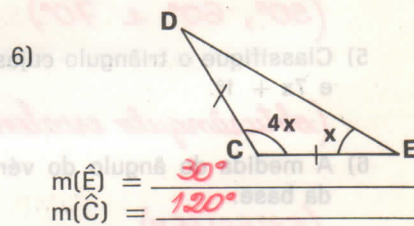
m(Ê) = 30°

m(Ĉ) = 120°

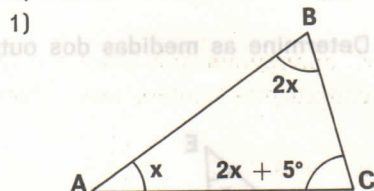
Resolução:

$x + x + 4x = 180°$

$6x = 180°$

$x = 30°$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

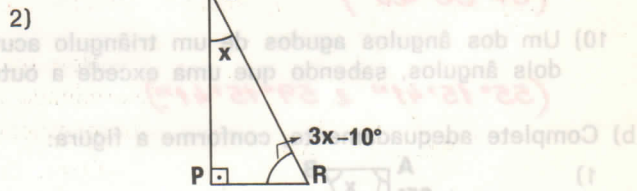
Complete de acordo com a figura:

1)

m(Â) = 35° m(B̂) = 70° m(Ĉ) = 75°

Lado maior: $\overline{AB}$

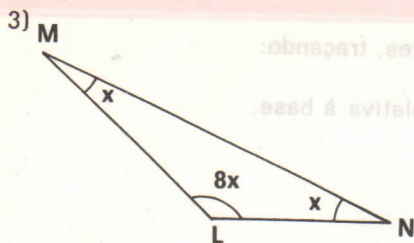
Lado menor: $\overline{BC}$

△ABC é acutângulo escaleno.

2)

m(P̂) = 90° m(Q̂) = 25° m(R̂) = 65°

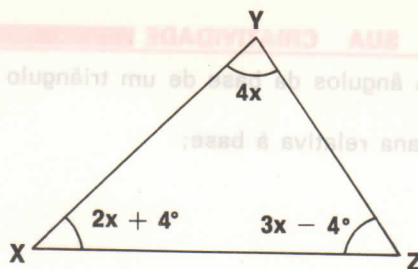
Lado maior: $\overline{QR}$

Lado menor: $\overline{PR}$

△PQR é retângulo escaleno.

m(M̂) = 18° m(N̂) = 18° m(L̂) = 144°

Lado maior: $\overline{MN}$

Lado menor: $\overline{ML} \cong \overline{LN}$

△LMN é obtusângulo isósceles.

m(X̂) = 44° m(Ŷ) = 80° m(Ẑ) = 56°

Lado maior: $\overline{XZ}$

Lado menor: $\overline{YZ}$

△XYZ é acutângulo escaleno.

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Resolva:

1) As medidas dos ângulos internos de um triângulo são expressas em graus por: x, 2x e 3x. Determine essas medidas e classifique o triângulo.
(30°, 60° e 90°; retângulo escaleno)

2) Classifique o triângulo cujas medidas dos ângulos internos são expressas em graus por: x, 2x e 8x + 4°.
(16°, 32° e 132°; obtusângulo escaleno)

3) As medidas dos ângulos da base de um triângulo isósceles são expressas em graus por 2x + 10° e 3x − 25°. Qual é a medida, em graus, do ângulo do vértice?
(20°)

4) As medidas dos ângulos internos de um triângulo são expressas em graus por: 2x, 2x + 10° e 2x + 20°. Calcule essas medidas.
(50°, 60° e 70°)

5) Classifique o triângulo cujas medidas dos ângulos internos são expressas em graus por: x + 1°, 3x + 2° e 7x + 1°.
(obtusângulo escaleno: 17°, 50° e 113°)

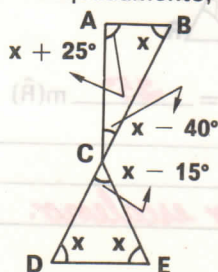
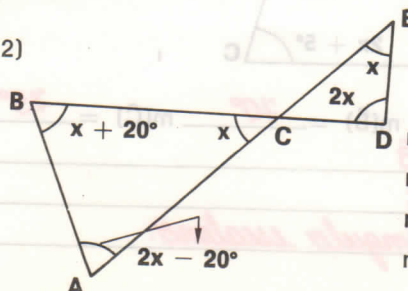
6) A medida do ângulo do vértice de um triângulo isósceles é 52°18'30". Determine as medidas dos ângulos da base.
(63°50'45")

7) Um dos ângulos da base de um triângulo isósceles mede 48°17'25". Determine a medida do ângulo do vértice.
(83°25'10")

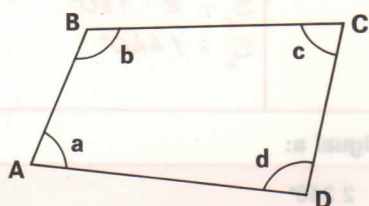
8) Um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo mede 21°34'42". Calcule a medida do outro ângulo agudo.
(68°25'18")

9) O ângulo obtuso de um triângulo obtusângulo mede 105°47'14". Determine as medidas dos outros dois ângulos, sabendo que eles são congruentes.
(37°06'23")

10) Um dos ângulos agudos de um triângulo acutângulo mede 65°28'38". Determine as medidas dos outros dois ângulos, sabendo que uma excede a outra em 4°.
(55°15'41" e 59°15'41")

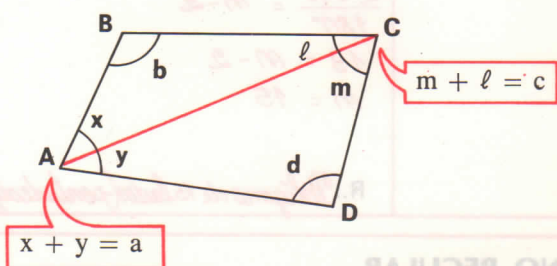
b) Complete adequadamente, conforme a figura:

1) x = 65°; m(Â) = 90°; m(B̂) = 65°; m(D̂) = 65°; m(Ê) = 65°

2) x = 45°; m(Â) = 70°; m(B̂) = 65°; m(D̂) = 90°; m(Ê) = 45°

POLÍGONOS CONVEXOS

SOMA DAS MEDIDAS DOS ÂNGULOS INTERNOS

Consideremos um quadrilátero convexo e indiquemos por letras as medidas de seus ângulos internos.

Qual o valor, em graus, da soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero ao lado?

$a + b + c + d = ?$

Para determinar esse valor, vamos traçar a diagonal com extremidade em A. Veja:

Então, temos:

$\boxed{a} + b + \boxed{c} + d = ?$

$x + y + b + m + \ell + d = ?$

$x + b + \ell + y + m + d = ?$

soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

$180^o + 180^o = 360^o$

Conclusão:

A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é igual a 360^o.

$$S_i = 360^o$$

Agora observe o quadro abaixo:

Triângulo	Quadrilátero	Pentágono	Hexágono
180°	360°	360° 180°	360° 360°
$S_i = 180^o$	$S_i = 360^o$	$S_i = 360^o + 180^o$ $S_i = 540^o$	$S_i = 360^o + 360^o$ $S_i = 720^o$

Então:

$n = \boxed{3} \rightarrow S_i = 180^o = \boxed{1} \times 180^o$ (−2)

$n = \boxed{4} \rightarrow S_i = 360^o = \boxed{2} \times 180^o$ (−2)

$n = \boxed{5} \rightarrow S_i = 540^o = \boxed{3} \times 180^o$ (−2)

⋮

Logo: $\boxed{S_i = (n - 2) \cdot 180^o}$

Determine a soma das medidas dos ângulos internos dos seguintes polígonos:

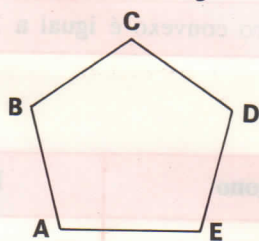
Heptágono	Octógono	Eneágono	Decágono
$n = 7$ $S_i = (n - 2) \cdot 180°$ $S_i = (7-2) \cdot 180°$ $S_i = 5 \cdot 180°$ $S_i = 900°$	$n = 8$ $S_i = (n-2) \cdot 180°$ $S_i = (8-2) \cdot 180°$ $S_i = 6 \cdot 180°$ $S_i = 1080°$	$n = 9$ $S_i = (n-2) \cdot 180°$ $S_i = (9-2) \cdot 180°$ $S_i = 7 \cdot 180°$ $S_i = 1260°$	$n = 10$ $S_i = (n-2) \cdot 180°$ $S_i = (10-2) \cdot 180°$ $S_i = 8 \cdot 180°$ $S_i = 1440°$

Descubra qual é o polígono cuja soma das medidas dos ângulos internos é igual a:

1 800°	1 620°	2 340°
$S_i = (n - 2) \cdot 180°$ $1\,800° = (n - 2) \cdot 180°$ $\frac{1\,800°}{180°} = n - 2$ $10 = n - 2$ $n = 12$ R.: Dodecágono.	$S_i = (n-2) \cdot 180°$ $1620° = (n-2) \cdot 180°$ $\frac{1620°}{180°} = n-2$ $9 = n-2$ $n = 11$ R.: Undecágono.	$S_i = (n-2) \cdot 180°$ $2\,340° = (n-2) \cdot 180°$ $\frac{2\,340°}{180°} = n-2$ $13 = n-2$ $n = 15$ R.: Polígono de 15 lados (pentadecágono)

NOÇÃO DE POLÍGONO REGULAR

Um polígono é denominado regular quando seus lados e seus ângulos são respectivamente congruentes.

Veja:

Pentágono regular

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EA}$

$\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong \hat{E}$

Como num polígono o número de ângulos internos é igual ao número de lados, pode-se determinar as medidas dos ângulos internos conhecendo-se a soma das medidas desses ângulos.

Observe:

- S_i = soma das medidas dos ângulos
- a_i = medida do ângulo interno

$\Longrightarrow$ $a_i = \frac{S_i}{n}$ (Válida para polígono regular)

Exemplo:

Determine as medidas dos ângulos internos de um hexágono regular.

Resolução:

$n = 6 \Longrightarrow S_i = (n - 2) \cdot 180°$

$S_i = (6 - 2) \cdot 180°$

$S_i = 4 \cdot 180° = 720°$

$a_i = \frac{S_i}{n}$

$a_i = \frac{720°}{6} = 120°$

R.: Cada ângulo interno mede 120°.

Determine a medida de cada ângulo interno dos seguintes polígonos regulares:

Pentágono	Octógono	Decágono
$n = 5$ $S_i = (n-2) \cdot 180°$ $S_i = (5-2) \cdot 180° \Rightarrow S_i = 540°$ $a_i = \dfrac{S_i}{n}$ $a_i = \dfrac{540°}{5} = 108°$	$n = 8$ $S_i = (n-2) \cdot 180°$ $S_i = (8-2) \cdot 180°$ $S_i = 6 \cdot 180° = 1080°$ $a_i = \dfrac{S_i}{n} = \dfrac{1080°}{8}$ $a_i = 135°$	$n = 10$ $S_i = (n-2) \cdot 180°$ $S_i = (10-2) \cdot 180°$ $S_i = 8 \cdot 180° = 1440°$ $a_i = \dfrac{S_i}{n} = \dfrac{1\,440}{10}$ $a_i = 144°$

Veja outro exemplo:

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 1 800°. Determine a medida de cada ângulo interno.

Resolução:

$S_i = (n - 2) \cdot 180°$

$1\,800° = (n - 2) \cdot 180°$

$\dfrac{1\,800°}{180°} = n - 2 \Longrightarrow 10 = n - 2$

$n = 12$

Então: $a_i = \dfrac{S_i}{n}$

$a_i = \dfrac{1\,800}{12}$

$a_i = 150°$

R.: Cada ângulo interno mede 150°.

Complete o quadro:

$S_i = 2\,340°$	$S_i = 4\,140°$	$S_i = 5\,040°$
$n = 15$	$n = 25$	$n = 30$
$a_i = 156°$	$a_i = 165°36'$	$a_i = 168°$
Resolução: $2\,340° = (n-2) \cdot 180°$ $\dfrac{2\,340°}{180°} = n-2$ $13 = n-2$ $n = 15$ $a_i = \dfrac{2\,340°}{15} = 156°$	**Resolução:** $4\,140° = (n-2) \cdot 180°$ $\dfrac{4\,140°}{180°} = n-2$ $23 = n-2$ $n = 25$ $a_i = \dfrac{4\,140°}{25} = 165°36'$	**Resolução:** $5\,040° = (n-2) \cdot 180°$ $\dfrac{5\,040°}{180°} = n-2$ $28 = n-2$ $n = 30$ $a_i = \dfrac{5\,040°}{30} = 168°$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Complete adequadamente:

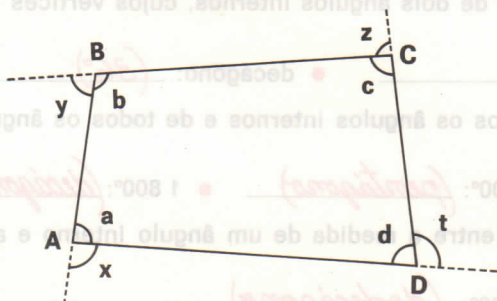
1) $n = 36$
   $S_i = 6\,120°$
   $a_i = 170°$

2) $S_i = 6\,840°$
   $n = 40$
   $a_i = 171°$

3) $S_i = 8\,640°$
   $n = 50$
   $a_i = 172°48'$

4) $a_i = 174°$
   $n = 60$
   $S_i = 10\,440°$

SOMA DAS MEDIDAS DOS ÂNGULOS EXTERNOS

Vamos considerar um quadrilátero convexo e indicar com letras as medidas dos ângulos internos e externos.

$a + x = 180°$
$b + y = 180°$
$c + z = 180°$
$d + t = 180°$ (+)

$a + b + c + d + x + y + z + t = 720°$

$360° + x + y + z + t = 720°$

$x + y + z + t = 360°$

Logo, a soma das medidas dos ângulos externos (um para cada vértice) de um quadrilátero convexo é igual a 360º.

DESENVOLVA SUA CRIATIVIDADE

Determine, como fizemos com o quadrilátero, a soma das medidas dos ângulos externos de um:

- pentágono;
- hexágono.

Conclusão: A soma das medidas dos ângulos externos (um para cada vértice) de qualquer polígono convexo é igual a 360º

$S_e = 360°$

Os ângulos externos de um polígono regular apresentam a mesma medida.

Então: $a_e = \frac{S_e}{n} \Longrightarrow$ $a_e = \frac{360°}{n}$

VAMOS EXERCITAR

a) Determine a medida de cada ângulo externo dos seguintes polígonos regulares:

Octógono	Decágono	Eneágono	Icoságono
$n = 8$	$n = 10$	$n = 9$	$n = 20$
$S_e = 360°$	$S_e = 360°$	$S_e = 360°$	$S_e = 360°$
$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{8}$	$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{10}$	$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{9}$	$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{20}$
$a_e = 45°$	$a_e = 36°$	$a_e = 40°$	$a_e = 18°$

b) Descubra qual é o polígono regular cujo ângulo externo tem a seguinte medida:

1) 72°

Resolução:

$a_e = \frac{360°}{n}$

$72° = \frac{360°}{n}$

$n = \frac{360°}{72°}$

$n = 5$

R.: Pentágono.

2) 60°

Resolução:

$a_e = \frac{360°}{n}$

$60° = \frac{360°}{n}$

$n = \frac{360°}{60°}$

$n = 6$

R.: Hexágono.

3) 24°

Resolução:

$a_e = \frac{360°}{n}$

$24° = \frac{360°}{n}$

$n = \frac{360°}{24°}$

$n = 15$

R.: Pentadecágono.

4) 15°

Resolução:

$a_e = \frac{360°}{n}$

$15° = \frac{360°}{n}$

$n = \frac{360°}{15°}$

$n = 24$

R.: Polígono de 24 lados.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Complete:

1) $a_e = 60°$
$n = 6$
$S_i = 720°$
$a_i = 120°$

2) $a_e = 90°$
$n = 4$
$S_i = 360°$
$a_i = 90°$

3) $a_e = 20°$
$n = 18$
$S_i = 2\,880°$
$a_i = 160°$

4) $a_e = 7°30'$
$n = 48$
$S_i = 8\,280°$
$a_i = 172°30'$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

1) Calcule a medida do ângulo determinado pelas bissetrizes de dois ângulos internos, cujos vértices são vértices consecutivos de um:

- pentágono: (72°)
- hexágono: (60°)
- decágono: (36°)

2) Descubra qual é o polígono cuja soma das medidas de todos os ângulos internos e de todos os ângulos externos (um para cada vértice) é igual a:

- 540°: (triângulo)
- 1 260°: (heptágono)
- 900°: (pentágono)
- 1 800°: (decágono)

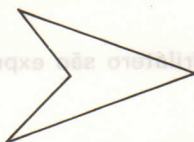
3) Descubra qual é o polígono regular convexo cuja diferença entre a medida de um ângulo interno e a de um ângulo externo é igual a:

- 90°: (octógono)
- 120°: (dodecágono)

O ESTUDO DOS QUADRILÁTEROS CONVEXOS

NOÇÃO DE QUADRILÁTERO

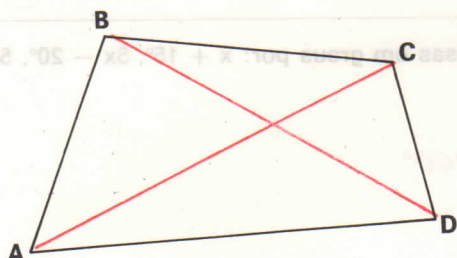
Qualquer polígono de quatro lados recebe o nome de **quadrilátero**.

Quadrilátero convexo

Quadrilátero não-convexo

Quadrilátero convexo

Vamos considerar agora somente os quadriláteros convexos, que serão chamados simplesmente de quadriláteros.

OS ELEMENTOS DE UM QUADRILÁTERO

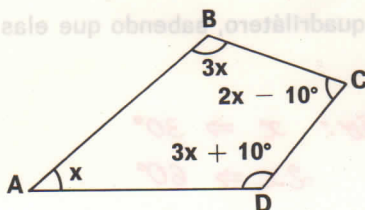
Observe o quadrilátero:

Indicação: □ ABCD

Nele destacamos:

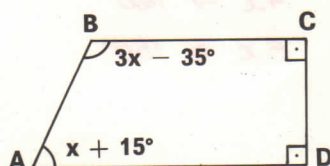
- lados: segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$;
- lados consecutivos: $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, $\overline{DA}$ e $\overline{AB}$;
- lados opostos: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$;
- diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$;
- ângulos internos: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$;
- ângulos opostos: $\hat{A}$ e $\hat{C}$, $\hat{B}$ e $\hat{D}$;
- ângulos colaterais: $\hat{A}$ e $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$.

VAMOS EXERCITAR

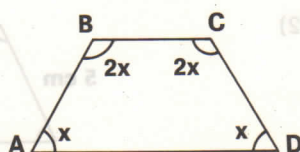
a) Dados os quadriláteros, determine as medidas de seus ângulos internos:

1)
m($\hat{A}$) = 40°
m($\hat{B}$) = 120°
m($\hat{C}$) = 70°
m($\hat{D}$) = 130°

Resolução:

$x + 3x + 2x - 10 + 3x + 10 = 360$
$9x = 360$
$x = 40°$

2)
m($\hat{A}$) = 65°
m($\hat{B}$) = 115°
m($\hat{C}$) = 90°
m($\hat{D}$) = 90°

Resolução:

$x + 15 + 3x - 35 = 180$
$4x = 180 - 15 + 35$
$4x = 200$
$x = 50°$

3)
m($\hat{A}$) = 60°
m(B) = 120°
m($\hat{C}$) = 120°
m($\hat{D}$) = 60°

Resolução:

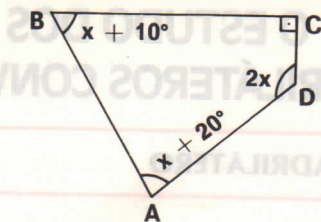
$x + 2x + x + 2x = 360$
$6x = 360$
$x = 60°$

4)

m(Â) = 80°

m(B̂) = 70°

m(Ĉ) = 90°

m(D̂) = 120°

Resolução:

$x + 10 + x + 20 + 2x = 270$

$4x = 240$

$x = 60°$

b) Resolva:

1) As medidas dos ângulos internos de um quadrilátero são expressas em graus por x, 3x + 10°, 6x e 8x − 10°. Determine essas medidas.

Resolução:

$x + 3x + 10° + 6x + 8x - 10° = 360°$

$18x = 360$

$x = 20°$

Então:

$x \Rightarrow 20°$ $\quad 6x \Rightarrow 120°$

$3x + 10 \Rightarrow 70°$ $\quad 8x - 10° \Rightarrow 150°$

R.: 20°, 70°, 120° e 150°

2) Os ângulos internos de um quadrilátero têm medidas expressas em graus por: x + 15°, 5x − 20°, 5x − 15° e 2x − 10°. Qual é o valor de x?

Resolução:

$x + 15° + 5x - 20° + 5x - 15° + 2x - 10° = 360°$

$13x = 360° - 15° + 20° + 15° + 10°$

$13x = 390°$

$x = 30°$

R.: 30°

3) Descubra as medidas dos ângulos internos de um quadrilátero, sabendo que elas são expressas em graus por x, 2x, 4x e 5x.

Resolução:

$x + 2x + 4x + 5x = 360°$

$12x = 360°$

$x = 30°$

Então:

$x \Rightarrow 30°$

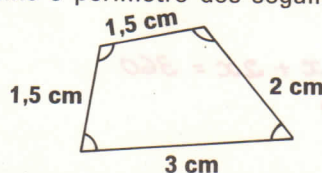
$2x \Rightarrow 60°$

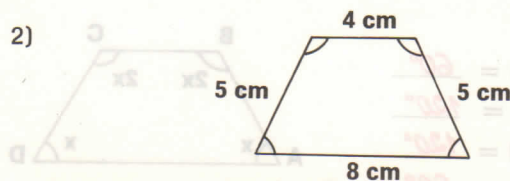
$4x \Rightarrow 120°$

$5x \Rightarrow 150°$

R.: 30°, 60°, 120° e 150°.

c) Determine o perímetro dos seguintes quadriláteros:

1)

Perímetro = 3 + 1,5 + 1,5 + 2 = 8 cm

2)

Perímetro = 5 + 4 + 5 + 8 = 22 cm

ALGUNS QUADRILÁTEROS ESPECIAIS

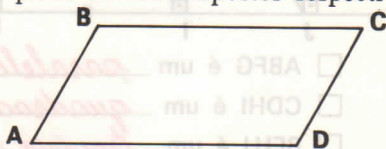
Observe o quadro:

Paralelogramo: denominação dada ao quadrilátero que apresenta os pares de lados opostos respectivamente paralelos.

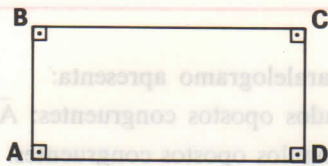
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

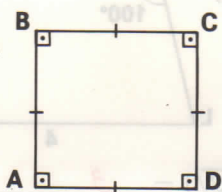
Trapézio: denominação dada ao quadrilátero que apresenta apenas dois lados opostos paralelos.

$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

Os paralelogramos recebem denominações especiais, de acordo com as medidas de seus lados e de seus ângulos internos. Veja:

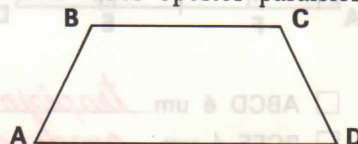
- **Retângulo**: quando os ângulos internos são retos.

$\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são retos

- **Quadrado**: quando os ângulos internos são retos e os lados, congruentes.

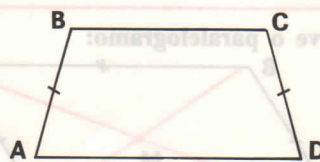
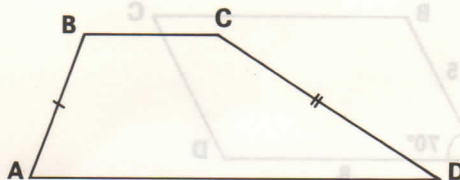
$\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são retos

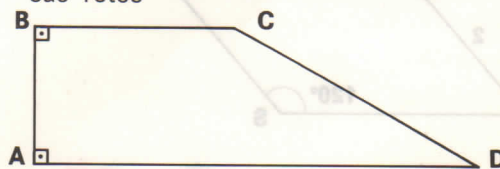
$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$

- **Losango**: quando os lados são congruentes.

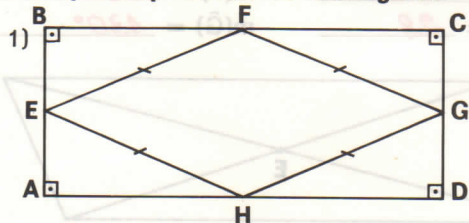
$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$

B
A
C
D

Os trapézios recebem denominações especiais, de acordo com as medidas de seus lados e de seus ângulos internos. Veja:

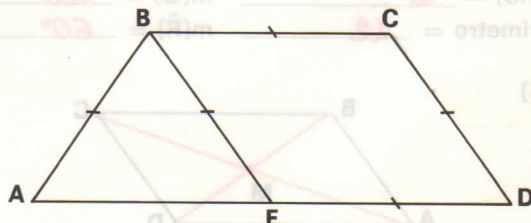
- **Trapézio isósceles**: quando os lados não-paralelos são congruentes.

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

- **Trapézio escaleno**: quando os lados não-paralelos não são congruentes.

- **Trapézio retângulo**: quando dois ângulos internos são retos.

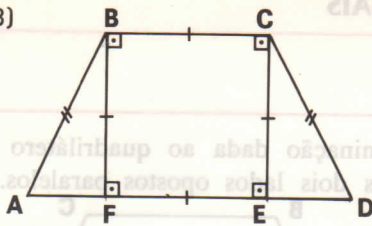
$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são retos

Reconheça os quadriláteros nas figuras:

1)

☐ ABCD é um retângulo.

☐ EFGH é um losango.

2)

☐ ABCD é um trapézio isósceles.

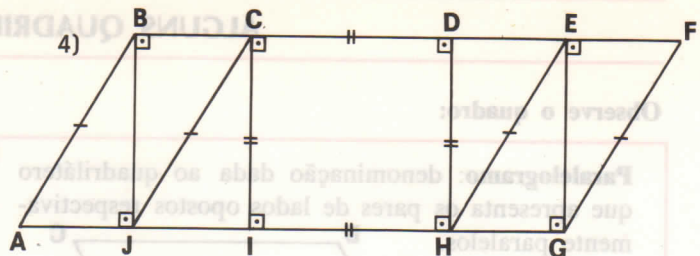
☐ BCDE é um losango.

3)

☐ ABCD é um *trapézio isósceles.*

☐ BCEF é um *quadrado.*

☐ FBCD é um *trapézio retângulo.*

☐ ABCE é um *trapézio retângulo.*

4)

☐ ABFG é um *paralelogramo.*

☐ CDHI é um *quadrado.*

☐ BEHJ é um *trapézio retângulo.*

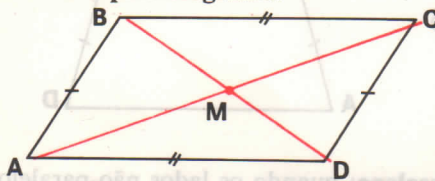
☐ ABCI é um *trapézio retângulo.*

☐ BEGJ é um *retângulo.*

PROPRIEDADES DOS PARALELOGRAMOS

Observe o paralelogramo:

O paralelogramo apresenta:

- lados opostos congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{BC} \cong \overline{AD}$;
- ângulos opostos congruentes: $\hat{A} \cong \hat{C}$ e $\hat{B} \cong \hat{D}$;
- diagonais que se interceptam no meio.

Com base nestas propriedades, complete:

1)

$m(\overline{BC})$ = *8*

$m(\overline{CD})$ = *5*

Perímetro = *26*

$m(\hat{B})$ = *110°*

$m(\hat{C})$ = *70°*

$m(\hat{D})$ = *110°*

2)

$m(\overline{LM})$ = *3*

$m(\overline{MN})$ = *4*

Perímetro = *14*

$m(\hat{L})$ = *80°*

$m(\hat{N})$ = *80°*

$m(\hat{O})$ = *100°*

3)

$m(\overline{PS})$ = *4*

$m(\overline{RS})$ = *2*

Perímetro = *12*

$m(\hat{P})$ = *60°*

$m(\hat{Q})$ = *120°*

$m(\hat{R})$ = *60°*

4)

$m(\overline{EF})$ = *6*

$m(\overline{EH})$ = *8*

Perímetro = *28*

$m(\hat{E})$ = *130°*

$m(\hat{F})$ = *50°*

$m(\hat{G})$ = *130°*

5)

$m(\overline{AM}) = 5$

$m(\overline{BM}) = 3$

$m(\overline{MD})$ = *3*

$m(\overline{MC})$ = *5*

$m(\overline{BD})$ = *6*

$m(\overline{AC})$ = *10*

6)

$m(\overline{AE}) = 9$

$m(\overline{BE}) = 7$

$m(\overline{EC})$ = *9*

$m(\overline{ED})$ = *7*

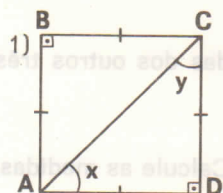
$m(\overline{AC})$ = *18*

$m(\overline{BD})$ = *14*

Como você já sabe, o paralelogramo pode ser retângulo, quadrado ou losango. Então:

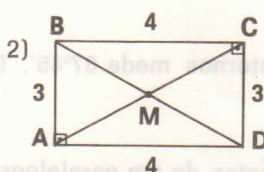
Retângulo	Quadrado	Losango
As diagonais são congruentes. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	As diagonais são perpendiculares, congruentes e bissetrizes dos ângulos internos. $\overline{PR} \perp \overline{QS}$, $\overline{PR} \cong \overline{QS}$	As diagonais são perpendiculares e bissetrizes dos ângulos internos. $\overline{CE} \perp \overline{DF}$

Complete adequadamente:

1)

x = 45°

y = 45°

☐ ABCD é um quadrado.

2)

$m(\overline{BD}) = 5$

$m(\overline{AM}) =$ 2,5

$m(\overline{MD}) =$ 2,5

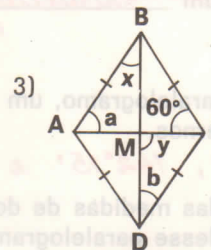
$m(\overline{AC}) =$ 5

☐ ABCD é um retângulo.

Perímetro = 14

3)

$m(\overline{AC}) = 2$

$m(\overline{BD}) = 4$

x = 30°

a = 60°

b = 30°

y = 90°

$m(\overline{BM}) =$ 2

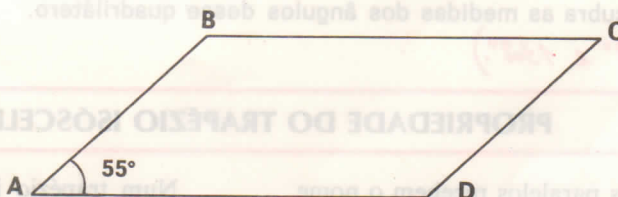
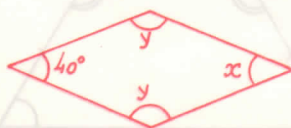
$m(\overline{MC}) =$ 1

☐ ABCD é um losango.

Resolva:

1) Um dos ângulos internos agudos de um paralelogramo mede 55°. Determine as medidas dos outros ângulos internos.

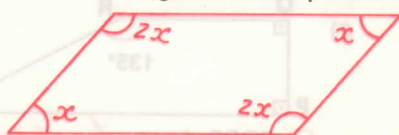
Resolução:

$m(\hat{C}) = 55°$
$m(\hat{B}) = 125°$
$m(\hat{D}) = 125°$

2) Um dos ângulos internos agudos de um losango mede 40°. Calcule as medidas dos outros ângulos internos.

Resolução:

$40° + y + x + y = 360°$
$40° + y + 40° + y = 360°$
$y + y = 360° - 40° - 40°$
$2y = 280° \Rightarrow y = 140°$

R.: 40°, 140° e 140°.

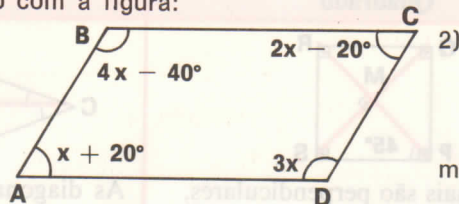
3) A medida de um ângulo obtuso de um paralelogramo é igual ao dobro da medida de um ângulo agudo. Determine as medidas dos ângulos desse paralelogramo.

Resolução:

$2x + x + 2x + x = 360°$
$6x = 360°$
$x = 60°$

R.: 60°, 120°, 60° e 120°.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete de acordo com a figura:

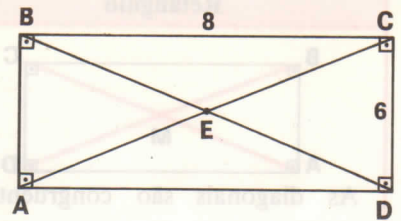
1)

m(Â) = 60°

m(B̂) = 120°

m(Ĉ) = 60°

m(D̂) = 120°

☐ ABCD é um paralelogramo.

2)

m($\overline{EC}$) = 5

m($\overline{AE}$) = 5

m($\overline{BD}$) = 10

Perímetro = 28

☐ ABCD é um retângulo.

b) Resolva:

1) Em um paralelogramo, um dos ângulos internos mede 37°45'. Determine as medidas dos outros três ângulos internos.

(37°45', 142°15' e 142°15'.)

2) A soma das medidas de dois ângulos opostos de um paralelogramo é igual a 70°. Calcule as medidas dos ângulos desse paralelogramo.

(35°, 145°, 35° e 145°.)

3) A medida de um dos ângulos agudos de um paralelogramo é igual a $\frac{3}{5}$ da medida de um de seus ângulos obtusos. Quais são as medidas dos ângulos desse polígono?

(67°30', 112°30', 112°30' e 67°30'.)

4) As medidas de dois ângulos opostos de um paralelogramo são expressas em graus por x + 20° e 2x − 10°. Determine as medidas dos ângulos desse paralelogramo.

(50°, 130°, 130° e 50°.)

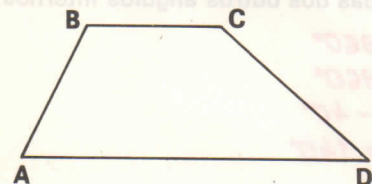
5) A medida de um dos ângulos agudos de um losango é 32°34'16". Determine as medidas dos outros ângulos desse losango.

(32°34'16", 147°25'44" e 147°25'44".)

6) As medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo são expressas em graus por 2x + 4°, 4x, 8x e 9x − 12°. Descubra as medidas dos ângulos desse quadrilátero.

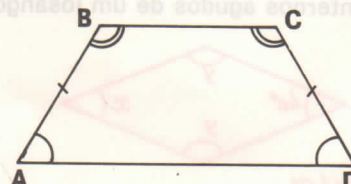
(36°, 64°, 128° e 132°.)

PROPRIEDADE DO TRAPÉZIO ISÓSCELES

Num trapézio, os lados paralelos recebem o nome de **bases**.

$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

$\overline{BC}$: base menor

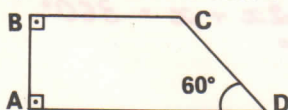
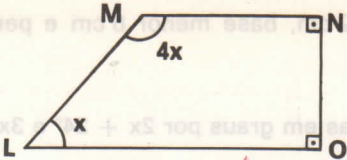
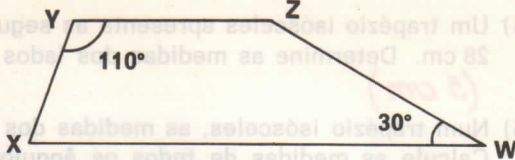
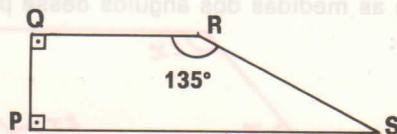
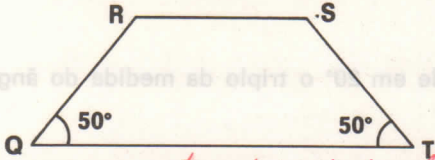
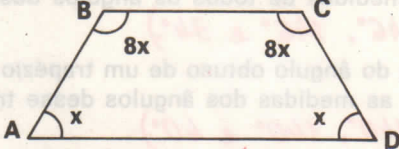
$\overline{AD}$: base maior

Num trapézio isósceles, os ângulos determinados pela mesma base com os lados não-paralelos são congruentes.

$\hat{B} \cong \hat{C}$

$\hat{A} \cong \hat{D}$

EXERCÍCIOS

a) Complete de acordo com a figura:

1)

☐ ABCD é um trapézio retângulo.

m(Â) = 90°   m(Ĉ) = 120°

2)

☐ PQRS é um trapézio retângulo.

m(Ŝ) = 45°

3)

☐ LMNO é um *trapézio retângulo.*

m(L̂) = *36°* m(M̂) = *144°*

4)

☐ XYZW é um *trapézio escaleno.*

m(X̂) = *70°* m(Ẑ) = *150°*

5)

☐ QRST é um *trapézio isósceles.*

m(R̂) = *130°* m(Ŝ) = *130°*

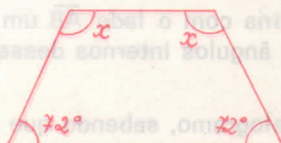
6)

☐ ABCD é um *trapézio isósceles*

m(Â) = *20°* m(Ĉ) = *160°*

m(B̂) = *160°* m(D̂) = *20°*

b) Resolva:

1) Num trapézio isósceles, um dos ângulos internos mede 72°. Quais são as medidas dos ângulos internos desse trapézio?

Resolução:

$x + 72° + x + 72° = 360°$

$2x = 216 \Rightarrow x = 108°$

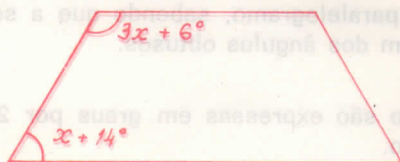
R.: *72°, 108°, 108° e 72°.*

2) As medidas dos dois ângulos determinados por um dos lados não-paralelos de um trapézio isósceles são expressas em graus por x + 14° e 3x + 6°. Quais são as medidas dos ângulos desse trapézio?

Resolução:

$x + 14° + 3x + 6° = 180°$

$4x = 160$

$x = 40°$

Então:

$x + 14° \Rightarrow 40° + 14° = 54°$

$3x + 6° \Rightarrow 120° + 6° = 126°$

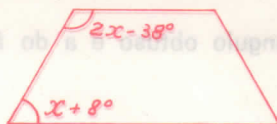
R.: *54°, 126°, 126° e 54°.*

3) As medidas dos dois ângulos determinados por um dos lados não-paralelos de um trapézio isósceles são expressas em graus por x + 8° e 2x − 38°. Determine as medidas dos ângulos desse trapézio.

Resolução:

$x + 8° + 2x - 38° = 180°$

$3x = 210$

$x = 70°$

Então: *$x + 8° \Rightarrow 78°$*

$2x - 38° \Rightarrow 102°$

R.: *78°, 102°, 102° e 78°.*

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Resolva:

1) A medida de um dos ângulos agudos de um trapézio isósceles é igual a 48°18'. Determine as medidas dos outros ângulos.
(131°42', 131°42' e 48°18'.)

2) O ângulo obtuso de um trapézio retângulo mede 104°30'15". Qual é a medida do ângulo agudo desse trapézio?
(75°29'45")

3) A medida do ângulo obtuso de um trapézio retângulo excede em 10° a medida do ângulo agudo. Quanto medem esses ângulos?
(95° e 85°).

4) Um trapézio isósceles apresenta as seguintes medidas: base maior 12 cm, base menor 6 cm e perímetro 28 cm. Determine as medidas dos lados não-paralelos.
(5 cm)

5) Num trapézio isósceles, as medidas dos ângulos obtusos são expressas em graus por $2x + 24°$ e $3x - 38°$. Calcule as medidas de todos os ângulos desse trapézio.
(148°, 148°, 32° e 32°.)

6) Sabendo que a soma das medidas dos ângulos agudos de um trapézio isósceles é igual a 68°, determine as medidas de todos os ângulos desse polígono.
(34°, 146°, 146° e 34°.)

7) A medida do ângulo obtuso de um trapézio isósceles excede em 20° o triplo da medida do ângulo agudo. Descubra as medidas dos ângulos desse trapézio.
(40°, 140°, 140° e 40°.)

8) As medidas de um ângulo agudo e um obtuso de um trapézio isósceles são expressas em graus por $4x - 12°$ e $20x$. Determine as medidas dos ângulos desse quadrilátero.
(20°, 160°, 160° e 20°.)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

Resolva:

1) Num paralelogramo ABCD, a diagonal $\overline{BD}$ determina com o lado $\overline{AB}$ um ângulo de 70° e com o lado $\overline{AD}$ um ângulo de 60°. Descubra quanto medem os ângulos internos desse paralelogramo.
(50°, 50°, 130° e 130°.)

2) Determine as medidas dos ângulos de um paralelogramo, sabendo que a diferença das medidas de dois ângulos colaterais é igual a 40°.
(70°, 110°, 110° e 70°.)

3) A medida de um ângulo obtuso de um paralelogramo excede em 15° a soma das medidas dos dois ângulos agudos. Calcule as medidas dos ângulos desse paralelogramo.
(55°, 125°, 125° e 55°.)

4) Descubra quais são as medidas dos ângulos de um paralelogramo, sabendo que a soma das medidas dos dois ângulos agudos excede em 30° a medida de um dos ângulos obtusos.
(70°, 110°, 110° e 70°.)

5) As medidas dos ângulos agudos de um paralelogramo são expressas em graus por $2x - 5°$ e $x + 20°$. Calcule as medidas dos ângulos desse paralelogramo.
(45°, 135°, 135° e 45°.)

6) Num paralelogramo, a medida do lado maior excede em três unidades a medida do lado menor. Sabendo que o perímetro é 14, descubra as medidas dos lados.
(2 e 5.)

7) A diagonal de um losango determina com os lados do losango dois triângulos eqüiláteros. Quais são as medidas dos ângulos desse losango?
(60°, 120°, 120° e 60°.)

8) Num trapézio retângulo, a diferença entre a medida do ângulo obtuso e a do ângulo agudo é de 100°. Determine as medidas desses ângulos.
(140° e 40°.)

9) Num trapézio isósceles, a medida de um ângulo obtuso é 145°. Quanto medem os ângulos desse trapézio?
(145°, 145°, 35° e 35°.)

10) As medidas das bases maior e menor de um trapézio isósceles são, respectivamente, 10 cm e 15 cm. Determine a medida de cada lado não-paralelo, sabendo que o perímetro desse trapézio é 39 cm.
(7 cm)

11) As medidas dos ângulos obtusos de um trapézio isósceles são expressas em graus por $2x + 5°$ e $3x - 45°$. Descubra as medidas dos ângulos desse trapézio.
(105°, 105°, 75° e 75°.)

12) As medidas dos ângulos obtuso e agudo de um trapézio retângulo são expressas em graus, respectivamente, por $7x - 9°$ e $2x$. Determine as medidas desses ângulos.
(138° e 42°.)

ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

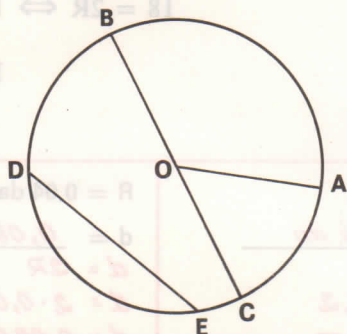
NOÇÃO DE CIRCUNFERÊNCIA

Com o auxílio de um compasso, você consegue traçar uma linha curva fechada simples que se denomina **circunferência**.

Definição:

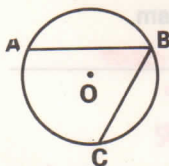
> Circunferência é o conjunto de pontos de um plano eqüidistantes de um mesmo ponto desse plano.

SEGMENTOS ESPECIAIS: O RAIO, A CORDA E O DIÂMETRO

Observe esta circunferência:

- O segmento $\overline{OA}$ chama-se **raio**.
  Raio: segmento cujos extremos são o centro e qualquer ponto da circunferência.
- O segmento $\overline{DE}$ chama-se **corda**.
  Corda: segmento cujos extremos pertencem à circunferência.
- O segmento $\overline{BC}$ chama-se **diâmetro**.
  Diâmetro: segmento cujos extremos pertencem à circunferência e que passa pelo centro.

EXERCÍCIOS

a) Dê o nome dos segmentos:

1)

$\overline{AB}$: corda

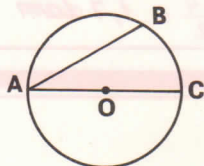
$\overline{BC}$: corda

Agora complete com o símbolo adequado:

B ∈ $\overline{AB}$ C ∉ $\overline{AB}$

B ∈ circunferência   C ∈ circunferência

O ∉ circunferência

2)

$\overline{AB}$: corda

$\overline{AC}$: diâmetro

$\overline{OA}$: raio

$\overline{OC}$: raio

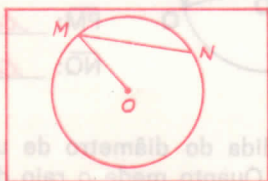
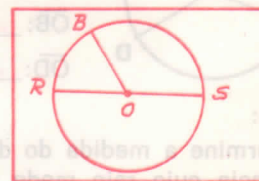
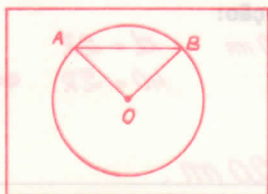
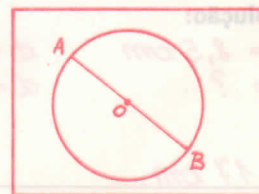
Agora complete com o símbolo adequado:

A ∈ $\overline{AB}$ A ∈ circunferência

A ∈ $\overline{AC}$ B ∈ circunferência

O ∉ $\overline{AB}$ $\overline{OA}$ ⊂ $\overline{AC}$

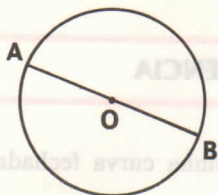
b) Com auxílio de um compasso, trace uma circunferência e indique:

1) Corda: $\overline{MN}$
Raio: $\overline{MO}$

2) Diâmetro: $\overline{RS}$
Raio: $\overline{OB}$

3) Raio: $\overline{OA}$
Raio: $\overline{OB}$
Corda: $\overline{AB}$

4) Raio: $\overline{OA}$
Raio: $\overline{OB}$
Diâmetro: $\overline{AB}$

RELAÇÃO ENTRE AS MEDIDAS DO DIÂMETRO E DO RAIO

Observe a figura:

$\overline{OA}$: raio

$\overline{OB}$: raio

$\overline{AB}$: diâmetro

Note que:

$m(\overline{AB}) = m(\overline{OA}) + m(\overline{OB})$

$d = R + R$

$d = 2R$

Exemplos:

1) Se a medida do raio de uma circunferência é 5 cm, qual é a medida do diâmetro?

Resolução:

$R = 5$ cm $d = 2R$

$d = ?$ $d = 2 \cdot 5$

$d = 10$ cm

2) Sabendo que a medida do diâmetro de uma circunferência é 18 cm, determine a medida do raio.

Resolução:

$d = 18$ cm $d = 2R$

$R = ?$ $18 = 2R \Leftrightarrow R = \frac{18}{2}$

$R = 9$ cm

Conhecendo a medida do raio, determine a medida do diâmetro:

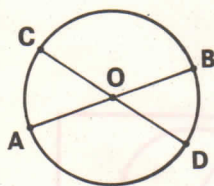
R = 8 dm	R = 5,5 dam	R = 7,2 m	R = 0,04 dam
d = 16 dm	d = 11 dam	d = 14,4 m	d = 0,08 dam
d = 2R	d = 2R	d = 2R	d = 2R
d = 2 · 8	d = 2 · 5,5	d = 2 · 7,2	d = 2 · 0,04
d = 16 dm	d = 11 dam	d = 14,4 m	d = 0,08 dam

Conhecendo a medida do diâmetro, calcule a medida do raio:

d = 26 cm	d = 25 dm	d = 3,4 dam
R = 13 cm	R = 12,5 dm	R = 1,7 dam
d = 2R	d = 2R	d = 2R
26 = 2R	25 = 2R	3,4 = 2R
$R = \frac{26}{2} = 13$ cm	$R = \frac{25}{2} = 12,5$ dm	$R = \frac{3,4}{2} = 1,7$ dam

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

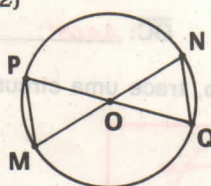
a) Dê o nome dos segmentos de acordo com a figura:

1)

$\overline{AB}$: diâmetro

$\overline{CD}$: diâmetro

$\overline{OB}$: raio

$\overline{OD}$: raio

2)

$\overline{MN}$: diâmetro

$\overline{PQ}$: diâmetro

$\overline{PM}$: corda

$\overline{NQ}$: corda

b) Resolva:

1) Determine a medida do diâmetro de uma circunferência cujo raio mede 8,5 cm.

Resolução:

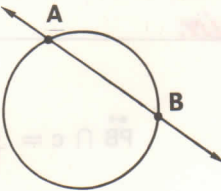
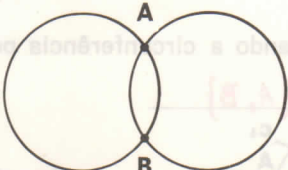
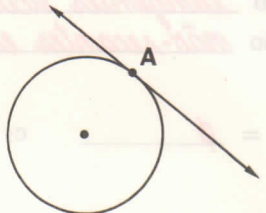
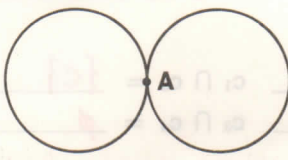
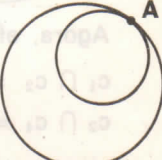
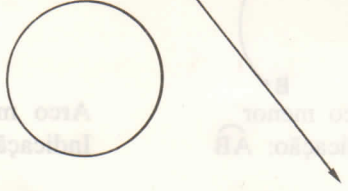
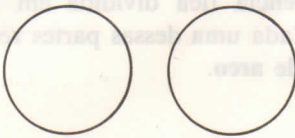
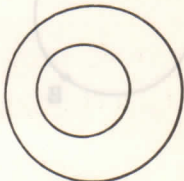
$R = 8,5$ cm $d = 2R$

$d = ?$ $d = 2 \cdot 8,5 = 17$

R.: 17 cm.

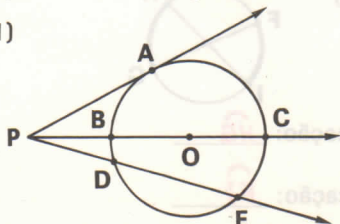
2) A medida do diâmetro de uma circunferência é 40 m. Quanto mede o raio dessa circunferência?

Resolução:

$d = 40$ m $d = 2R$

$R = ?$ $40 = 2R \Leftrightarrow R = \frac{40}{2} = 20$

R.: 20 m.

POSIÇÕES RELATIVAS

Vamos estudar as posições que uma reta pode assumir em relação a uma circunferência; analisaremos também as posições que uma circunferência pode assumir em relação a outra circunferência.

Observe o quadro:

Posições de uma reta r em relação a uma circunferência c	**Posições relativas de duas circunferências c_1 e c_2**
A reta e a circunferência apresentam dois pontos comuns. $r \cap c = \{A, B\}$ Dizemos que a reta é **secante** à circunferência.	As duas circunferências apresentam dois pontos comuns. $c_1 \cap c_2 = \{A, B\}$ Dizemos que as circunferências são **secantes**.
A reta e a circunferência apresentam um só ponto comum. $r \cap c = \{A\}$ Dizemos que a reta é **tangente** à circunferência.	As duas circunferências apresentam um só ponto comum. **externamente** **internamente** $c_1 \cap c_2 = \{A\}$ Dizemos que as circunferências são **tangentes**.
A reta e a circunferência não apresentam ponto comum. $r \cap c = \varnothing$ Dizemos que a reta é **exterior** à circunferência.	As duas circunferências não apresentam ponto comum. **externamente** **internamente** $c_1 \cap c_2 = \varnothing$ Dizemos que as circunferências são **não-secantes**.

VAMOS EXERCITAR

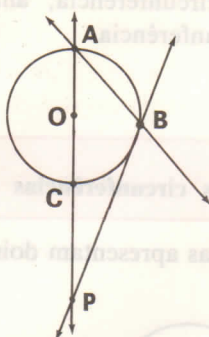
Complete as sentenças de acordo com a figura:

1)

- A semi-reta $\overrightarrow{PA}$ é tangente à circunferência.
- A semi-reta $\overrightarrow{PC}$ é secante à circunferência.
- A semi-reta $\overrightarrow{PE}$ é secante à circunferência.

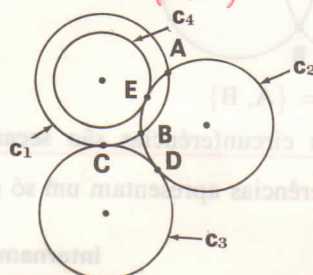
Agora, indicando a circunferência por **c**, efetue:

$\vec{PA} \cap c =$ {A} $\vec{PC} \cap c =$ {B, C} $\vec{PE} \cap c =$ {D, E}

2)

- A reta $\overleftrightarrow{AC}$ é secante à circunferência.
- A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é secante à circunferência.
- A reta $\overleftrightarrow{PB}$ é tangente à circunferência.
- O segmento $\overline{AB}$ denomina-se corda.
- O segmento $\overline{AC}$ denomina-se diâmetro.
- O segmento $\overline{AO}$ denomina-se raio.

Agora, indicando a circunferência por **c**, efetue:

$\overleftrightarrow{AB} \cap c =$ {A, B} $\overleftrightarrow{AC} \cap c =$ {A, C} $\overleftrightarrow{PB} \cap c =$ {B}

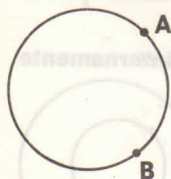
3)

- As circunferências c_1 e c_2 são secantes.
- As circunferências c_1 e c_3 são tangentes externamente.
- As circunferências c_2 e c_3 são tangentes externamente.
- As circunferências c_1 e c_4 são não-secantes internamente.
- As circunferências c_2 e c_4 são tangentes externamente.
- As circunferências c_3 e c_4 são não-secantes externamente.

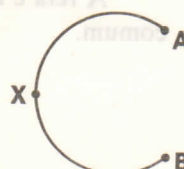
Agora, efetue:

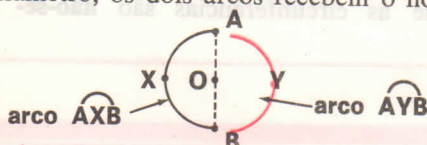
$c_1 \cap c_2 =$ {A, B} $c_1 \cap c_3 =$ {C} $c_1 \cap c_4 =$ ∅ $c_2 \cap c_3 =$ {D}

$c_2 \cap c_4 =$ {E} $c_3 \cap c_4 =$ ∅

NOÇÃO DE ARCO

Consideremos uma circunferência e dois de seus pontos:

Em relação aos pontos A e B, a circunferência fica dividida em duas partes. Cada uma dessas partes recebe o nome de **arco**.

Arco menor
Indicação: $\overset{\frown}{AB}$

Arco maior
Indicação: $\overset{\frown}{AXB}$

Perceba que os pontos A e B são os extremos de uma corda. Se os pontos A e B forem os extremos de um diâmetro, os dois arcos recebem o nome de **semicircunferência**.

Os arcos $\overset{\frown}{AXB}$ e $\overset{\frown}{AYB}$ são semicircunferências.

Dê a indicação dos arcos assinalados:

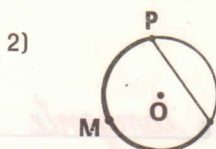
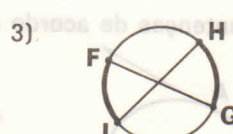
1)

Indicação: $\overset{\frown}{AB}$

Indicação: $\overset{\frown}{MN}$

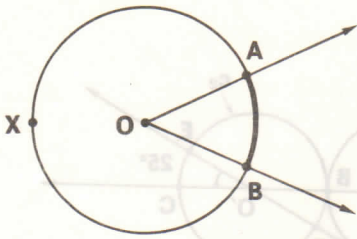
2)

Indicação: $\overset{\frown}{PMQ}$

3)

Indicação: $\overset{\frown}{HG}$

Indicação: $\overset{\frown}{FI}$

MEDIDA DE UM ARCO

Observe a figura:

O ângulo AÔB, cujo vértice coincide com o centro da circunferência, recebe o nome de **ângulo central**. Os lados do ângulo central determinam na circunferência o arco $\widehat{AB}$.

A medida do arco $\widehat{AB}$ é igual à medida do ângulo central AÔB.
Assim: $m(\widehat{AB}) = m(A\hat{O}B)$

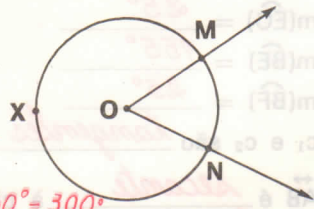
A medida do arco maior $\widehat{AXB}$ é determinada pela diferença:
$m(\widehat{AXB}) = 360^o - m(\widehat{AB})$

Com o auxílio de um transferidor, determine:

1)

$m(M\hat{O}N) =$ *60°*

$m(\widehat{MN}) =$ *60°*

$m(\widehat{MXN}) =$ *360° - 60° = 300°*

2)

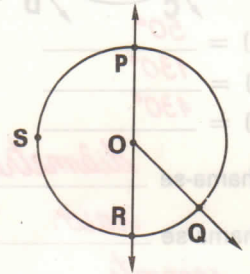
$m(P\hat{O}Q) =$ *135°*

$m(Q\hat{O}R) =$ *45°*

$m(\widehat{RQ}) =$ *45°*

$m(\widehat{PQ}) =$ *135°*

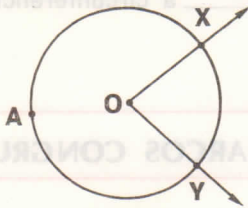
$m(\widehat{PQR}) =$ *180°*

$m(\widehat{PSR}) =$ *180°*

Com base na figura e nos dados fornecidos, complete as igualdades:

1)

$m(X\hat{O}Y) = 80°$

$m(\widehat{XY}) =$ *80°*

$m(\widehat{XAY}) =$ *280°*

2)

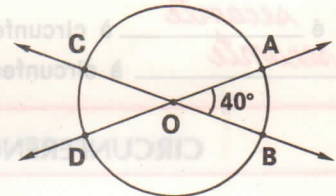
$m(\widehat{AB}) =$ *40°*

$m(\widehat{CD}) =$ *40°*

$m(\widehat{AC}) =$ *140°*

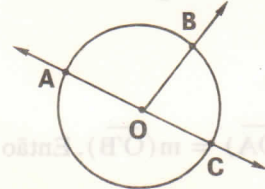
$m(\widehat{BD}) =$ *140°*

$m(\widehat{ACD}) =$ *180°*

$m(\widehat{BDA}) =$ *320°*

3)

$m(B\hat{O}C) = 78°25'$

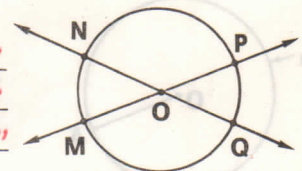
$m(\widehat{BC}) =$ *78°25'*

$m(\widehat{AB}) =$ *101°35'*

4)

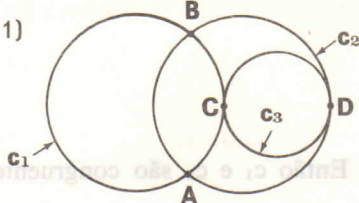
$m(\widehat{PQ}) = 44°20'30''$

$m(\widehat{MN}) =$ *44°20'30"*

$m(\widehat{NP}) =$ *135°39'30"*

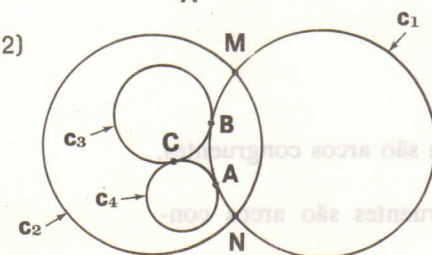
$m(\widehat{MQ}) =$ *135°39'30"*

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete as frases, indicando a posição relativa das circunferências:

1)

c_1 e c_2 são *secantes.*

c_1 e c_3 são *tangentes externamente.*

c_2 e c_3 são *tangentes internamente.*

2)

c_1 e c_2 são *secantes.*

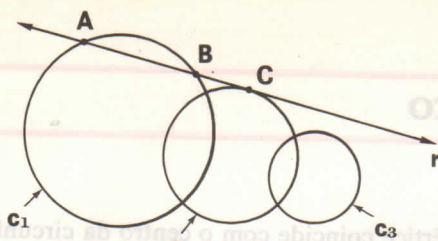
c_1 e c_3 são *tangentes externamente.*

c_1 e c_4 são *tangentes externamente.*

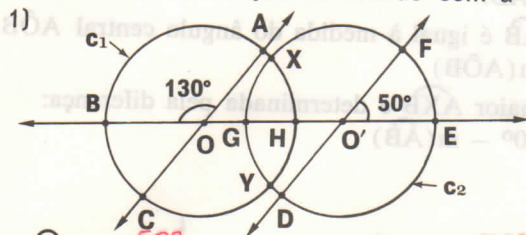
c_2 e c_3 são *não-secantes internamente.*

c_2 e c_4 são *não-secantes internamente.*

c_3 e c_4 são *tangentes externamente.*

3)

r é *secante* à circunferência c_1.
r é *tangente* à circunferência c_2.
r é *exterior* à circunferência c_3.

b) Complete as sentenças de acordo com a figura:

1)

$m(\widehat{BC})$ = *50°*
$m(\widehat{DE})$ = *130°*
$m(\widehat{FG})$ = *130°*

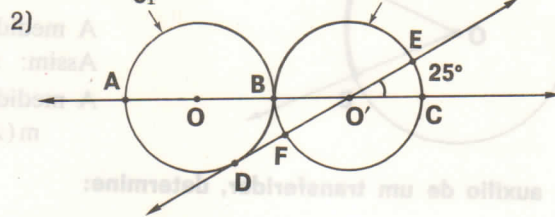
$m(\widehat{AH})$ = *50°*
$c_1 \cap c_2$ = *{X, Y}*

$\overline{AC}$ chama-se *diâmetro.*

$\overline{OB}$ chama-se *raio.*

$\overleftrightarrow{AC}$ é *secante* à circunferência c_1
e *exterior* à circunferência c_2.

$\overleftrightarrow{GH}$ é *secante* à circunferência c_1
e *secante* à circunferência c_2.

2)

$m(\widehat{EC})$ = *25°*
$m(\widehat{BE})$ = *155°*
$m(\widehat{BF})$ = *25°*

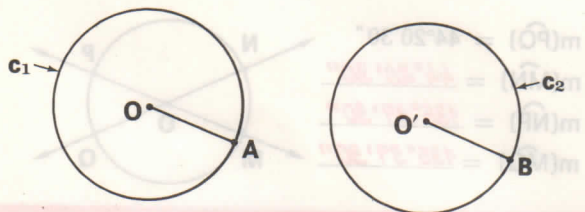
$m(\widehat{FC})$ = *155°*
$c_1 \cap c_2$ = *{B}*

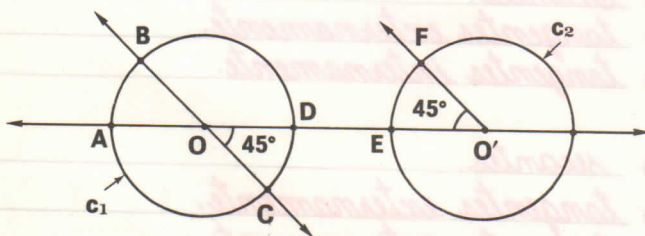
c_1 e c_2 são *tangentes externamente.*

$\overleftrightarrow{AB}$ é *secante* à circunferência c_1 e *secante* à circunferência c_2.

$\overleftrightarrow{DF}$ é *tangente* à circunferência c_1 e *secante* à circunferência c_2.

CIRCUNFERÊNCIAS CONGRUENTES — ARCOS CONGRUENTES

Duas circunferências são congruentes quando apresentam raios congruentes.

$m(\overline{OA}) = m(\overline{O'B})$. Então c_1 e c_2 são congruentes.

Arcos de mesma medida, determinados na mesma circunferência ou, então, em circunferências congruentes, são denominados arcos congruentes.

$m(\overline{OD}) = m(\overline{O'E})$. Então c_1 e c_2 são congruentes.

$m(\widehat{AB}) = 45°$
$m(\widehat{CD}) = 45°$ } Os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ contidos na mesma circunferência são arcos congruentes.

$m(\widehat{AB}) = 45°$
$m(\widehat{EF}) = 45°$ } Os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{EF}$ contidos em circunferências congruentes são arcos congruentes.

CIRCUNFERÊNCIAS CONCÊNTRICAS

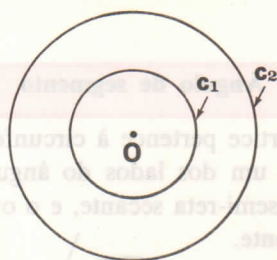
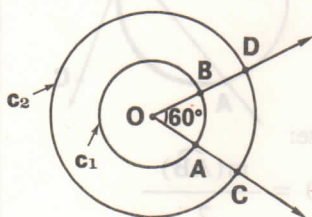
Duas circunferências são concêntricas quando apresentam o mesmo centro.

O ponto O é o centro das duas circunferências. Então, c_1 e c_2 são concêntricas.

Note que duas circunferências concêntricas são não-secantes internamente.

Agora observe:

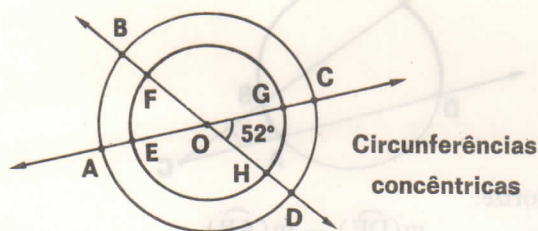
c_1 e c_2 são concêntricas

$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{AB}) = 60^o \\ m(\widehat{CD}) = 60^o \end{array}\right\}$$

Os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$, apesar de possuírem a mesma medida, não são congruentes, pois não estão contidos na mesma circunferência nem em circunferências congruentes.

EXERCÍCIO

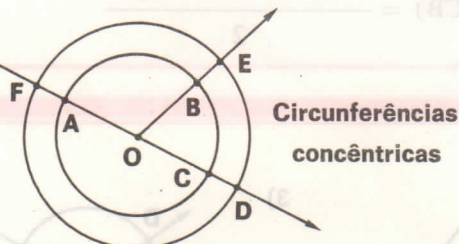
Complete de acordo com a figura:

1)

Circunferências concêntricas

m($\widehat{GH}$) = 52°
m($\widehat{EF}$) = 52°
m($\widehat{AB}$) = 52°
m($\widehat{CD}$) = 52°

m($\widehat{BC}$) = 128°
m($\widehat{AD}$) = 128°
m($\widehat{FG}$) = 128°
m($\widehat{EH}$) = 128°

Os arcos $\widehat{EF}$ e $\widehat{GH}$; $\widehat{FG}$ e $\widehat{EH}$; $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$; $\widehat{BC}$ e $\widehat{AD}$ são congruentes.

2)

Circunferências concêntricas

m($\widehat{BC}$) = 70°
m($\widehat{AB}$) = 110°
m($\widehat{EF}$) = 110°
m($\widehat{DE}$) = 70°

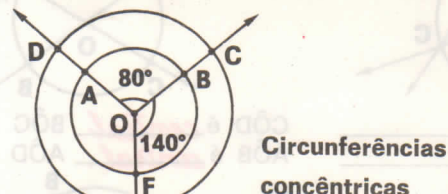
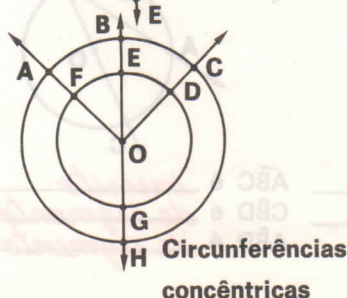
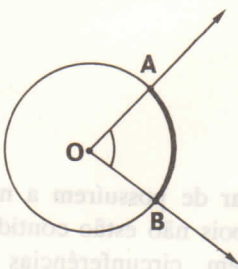
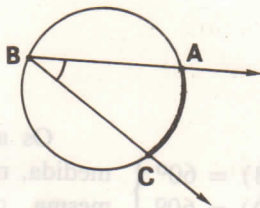
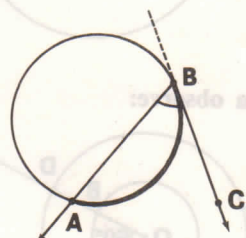
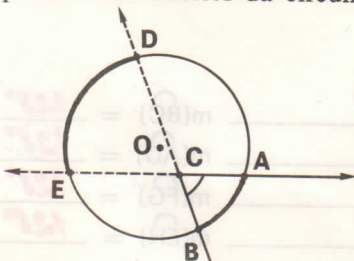
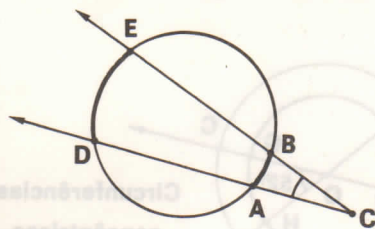
3)

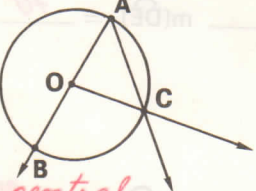
Circunferências concêntricas

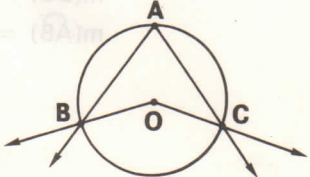
m($\widehat{AF}$) = 140°
m($\widehat{DE}$) = 140°
m($\widehat{AB}$) = 80°
m($\widehat{BF}$) = 140°

4)

B E A F E C D O G H

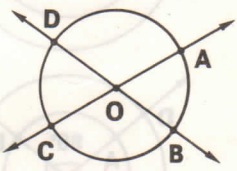
Circunferências concêntricas

m($\widehat{FE}$) = 45°
m($\widehat{BC}$) = 45°
m($\widehat{DG}$) = 135°

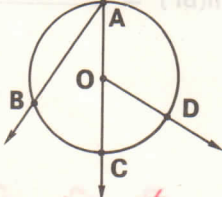
Os arcos congruentes são $\widehat{FE}$ e $\widehat{ED}$; $\widehat{AB}$ e $\widehat{BC}$; $\widehat{DG}$ e $\widehat{GF}$; $\widehat{CH}$ e $\widehat{HA}$.

ÂNGULOS RELACIONADOS COM ARCOS

Observe o quadro:

Ângulo central	Ângulo inscrito	Ângulo de segmento
O vértice coincide com o centro. Memorize: $m(A\hat{O}B) = m(\widehat{AB})$	O vértice pertence à circunferência e os lados do ângulo são semi-retas secantes. Memorize: $m(A\hat{B}C) = \dfrac{m(\widehat{AC})}{2}$	O vértice pertence à circunferência e um dos lados do ângulo é uma semi-reta secante, e o outro, tangente. Memorize: $m(A\hat{B}C) = \dfrac{m(\widehat{AB})}{2}$

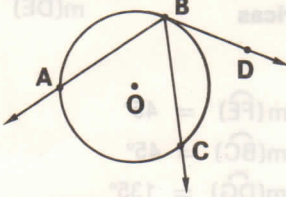
Ângulos cujo vértice não coincide com o centro e não pertence à circunferência

O vértice pertence ao interior da circunferência.	O vértice pertence ao exterior da circunferência.
Memorize: $m(A\hat{C}B) = \dfrac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{DE})}{2}$	Memorize: $m(A\hat{C}B) = \dfrac{m(\widehat{DE}) - m(\widehat{AB})}{2}$

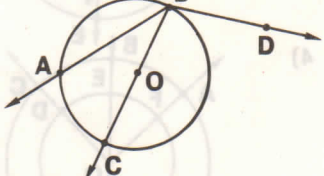
VAMOS EXERCITAR

a) Dê as denominações dos ângulos de acordo com a figura:

1)

BÔC é central

BÂC é inscrito

2)

BÔC é central

BÂC é inscrito

3)

CÔD é central. BÔC é central.

AÔB é central. AÔD é central.

4)

BÂC é inscrito

CÔD é central.

AÔD é central.

5)

ABC é inscrito.

CBD é de segmento.

6)

ABC é inscrito

CBD é de segmento.

ABD é de segmento.

b) Determine as medidas dos ângulos e dos arcos:

1)

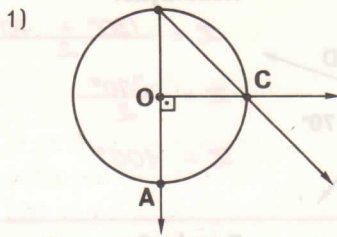
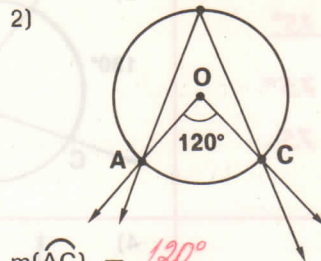
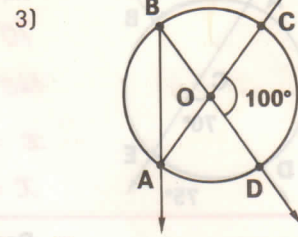
m($\widehat{AC}$) = 90°

m($A\hat{B}C$) = 45°

2)

m($\widehat{AC}$) = 120°

m($A\hat{B}C$) = 60°

3)

m($\widehat{DC}$) = 100° m($A\hat{B}D$) = 40°

m($\widehat{BC}$) = 80° m($B\hat{A}C$) = 40°

m($\widehat{AD}$) = 80°

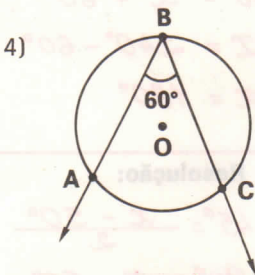
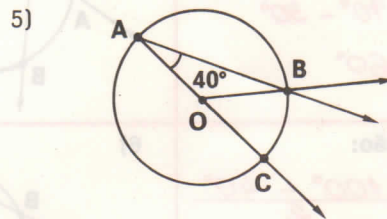
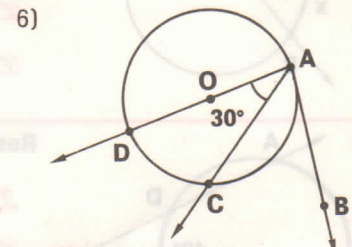
4)

m($\widehat{AC}$) = 120°

5)

m($\widehat{BC}$) = 80°

m($B\hat{O}C$) = 80°

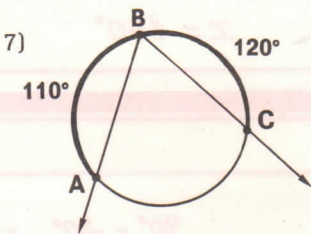
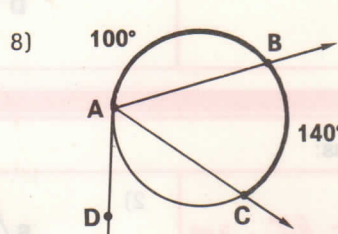
6)

m($\widehat{CD}$) = 60°

m($\widehat{AC}$) = 120° m($B\hat{A}C$) = 60°

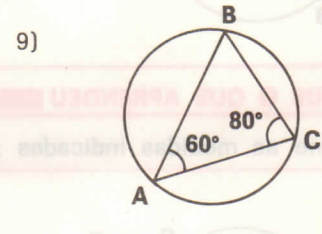
7)

m($\widehat{AC}$) = 130°

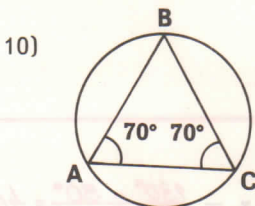
m($A\hat{B}C$) = 65°

8)

m($\widehat{AC}$) = 120°

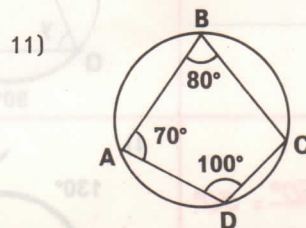
m($B\hat{A}C$) = 70° m($C\hat{A}D$) = 60°

9)

m($A\hat{B}C$) = 40° m($\widehat{BC}$) = 120°

m($\widehat{AB}$) = 160° m($\widehat{AC}$) = 80°

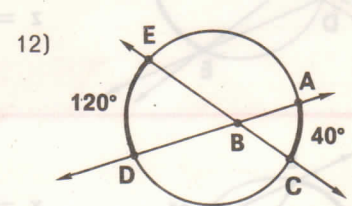
10)

m($A\hat{B}C$) = 40° m($\widehat{BC}$) = 140°

m($\widehat{AB}$) = 140° m($\widehat{AC}$) = 80°

11)

m($\widehat{ABC}$) = 200° m($\widehat{BCD}$) = 140°

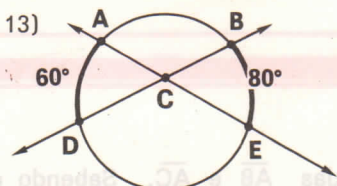
m($\widehat{ADC}$) = 160° m($\widehat{BAD}$) = 220°

12)

E
120°
A
B
40°
D
C

m($A\hat{B}C$) = $\frac{40° + 120°}{2}$ = 80°

m($A\hat{B}E$) = 100°

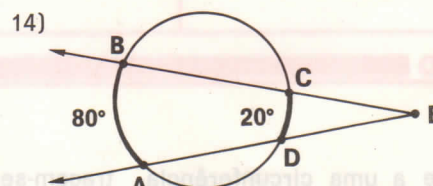
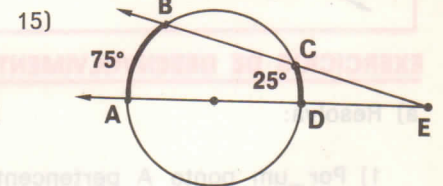
13)

A
B
60°
80°
C
D
E

m($B\hat{C}E$) = $\frac{80° + 60°}{2}$ = 70°

m($A\hat{C}B$) = 110°

14)

m($C\hat{E}D$) = $\frac{80° - 20°}{2}$ = 30°

15)

m($C\hat{E}D$) = $\frac{75° - 25°}{2}$ = 25°

c) Determine o valor de **x** de acordo com a figura:

1) A, x, B, C, 70°, D, E, 75°

Resolução:

$70° = \frac{x + 75°}{2}$

$140° = x + 75°$

$x = 140° - 75$

$x = 65°$

2) A, 130°, D, B, x, 70°, C, E

Resolução:

$x = \frac{130° + 70°}{2}$

$x = \frac{200°}{2}$

$x = 100°$

3) E, 30°, A, D, 45°, C, x, B

Resolução:

$45° = \frac{x + 30°}{2}$

$90° = x + 30°$

$x = 90° - 30°$

$x = 60°$

4) E, D, 60°, 60°, C, A, x, B

Resolução:

$120° = \frac{x + 60°}{2}$

$240° = x + 60°$

$x = 240° - 60°$

$x = 180°$

5) A, D, 100°, 40°, x, E, C, B

Resolução:

$x = \frac{100° - 40°}{2}$

$x = \frac{60°}{2}$

$x = 30°$

6) C, B, A, 45°, 50°, x, D, E

Resolução:

$45° = \frac{x - 50°}{2}$

$90° = x - 50°$

$x = 90° + 50°$

$x = 140°$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Determine as medidas indicadas por letras:

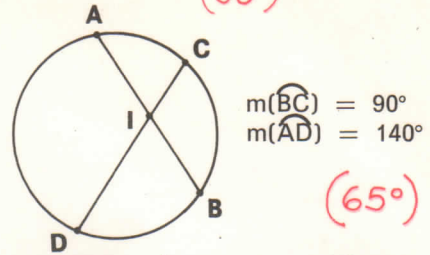
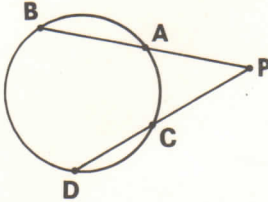
EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Resolva:

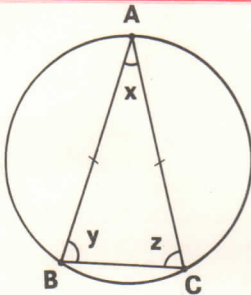
1) Por um ponto A pertencente a uma circunferência, traçam-se as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Sabendo que $m(\widehat{AB}) = 80°$ e $m(\widehat{AC}) = 120°$, determine a medida do ângulo $B\hat{A}C$. (80°)

2) Pelo extremo A de uma corda $\overline{AB}$, traça-se outra corda $\overline{AC}$. Determine a medida do ângulo $B\hat{A}C$, sabendo que as medidas dos arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{CA}$ são expressas em graus, respectivamente, por x, 2x e 3x.
(60°)

3) Duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se interceptam num ponto I pertencente ao interior da circunferência. Calcule a medida do ângulo $A\hat{I}D$, sabendo que $m(\widehat{BC}) = 67°30'$ e $m(\widehat{AD}) = 32°30'$. (50°)

4) Determine, conforme a figura, a medida do ângulo $B\hat{I}D$:

5) Por um ponto P exterior a uma circunferência traçam-se dois segmentos de secante, conforme a figura:

Sabendo que a medida do arco $\widehat{AC}$ é 45°15'30" e a do arco $\widehat{BD}$ é 125°30'48", determine a medida do ângulo cujo vértice é P. (40°07'39")

b) Determine o valor de **x**, **y** e **z** de acordo com a figura:

1)

$m(\widehat{BC}) = 60°$

x = 30°

y = 75°

z = 75°

2)

$m(\widehat{AB}) = 80°$

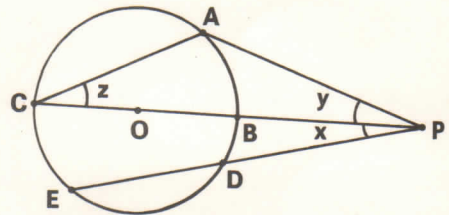
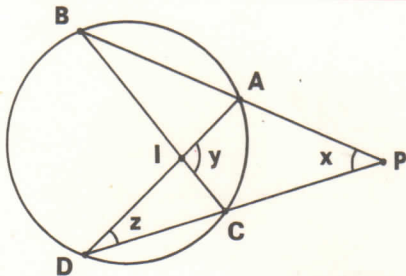
$m(\widehat{BD}) = 30°$

$m(\widehat{DE}) = 80°$

x = 20°

y = 10°

z = 40°

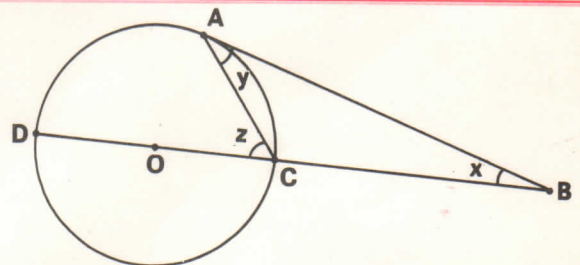
3)

$m(\widehat{AC}) = 40°30'$

$m(\widehat{BD}) = 120°40'$

x = 40°05'

y = 80°35'

z = 20°15'

4)

$m(\widehat{AC}) = 72°10'20"$

x = 17°49'40"

y = 36°05'10"

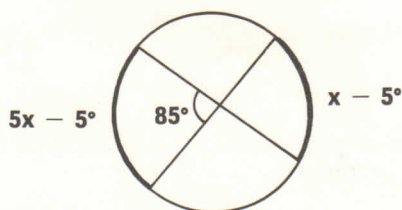
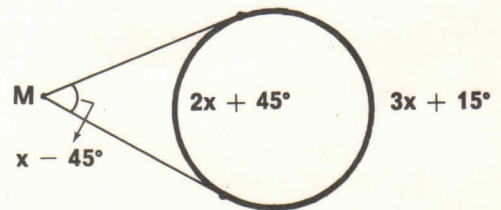
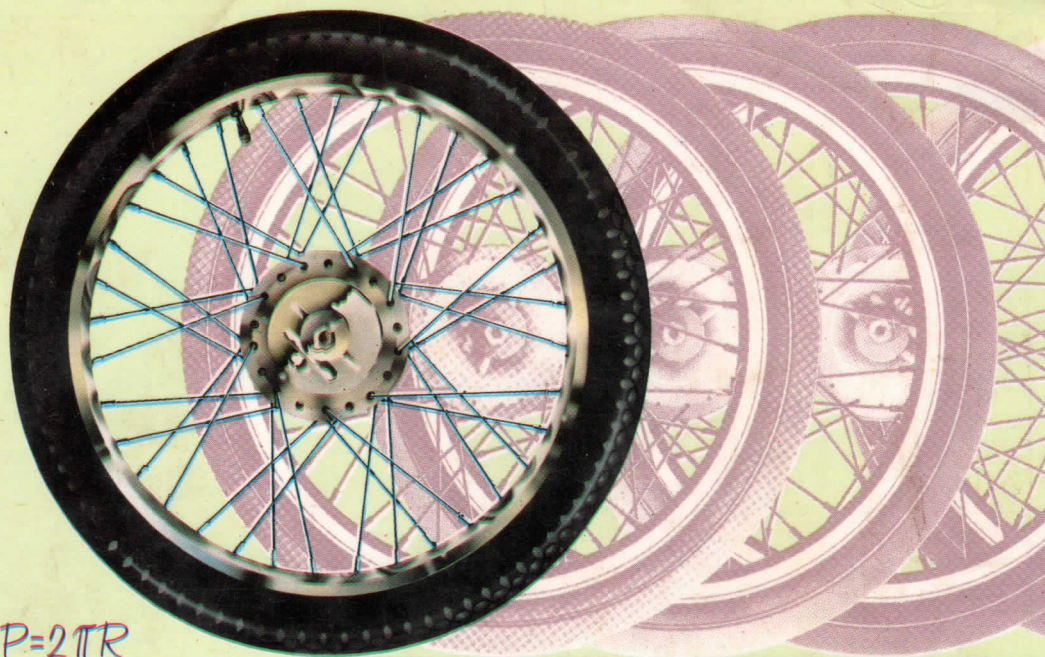
z = 53°54'50"

c) Determine o valor de **x** de acordo com a figura:

1)

x = 30°

2)

x = 60°

P=2πR
Metro quadrado:
unidade fundamental de
medida de área, correspondente
à área de um quadrado,
cuja medida do comprimento
do lado é de 1 metro.
1m
1m